ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
146

EXPOSÉS D'ANALYSE GÉNÉRALE

Publiés sous la direction de

MAURICE FRÉCHET

Professeur à la Sorbonne

III

PROPRIÉTÉS DES ESPACES ABSTRAITS LES PLUS GÉNÉRAUX

Compacité, séparabilité, transformations et fonctionnelles.

PAR

Antoine APPERT
Docteur ès-Sciences Mathématiques

PARIS
HERMANN & C^{ie}, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1934

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière. — 26-4-1934

TABLE DES MATIÈRES

TOME II

ou égal au type de dimensions d'un ensemble F et on écrit $d\mathrm{E} \leqslant d\mathrm{F}$ s'il existe une homéomorphie transformant E en un sous-ensemble de F (ce sous-ensemble pouvant être F lui-même). Cette définition permet d'obtenir dans l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général, des égalités et inégalités entre types de dimensions jouissant des mêmes propriétés formelles que les égalités et inégalités ordinaires. Remarquons toutefois que, même dans le cas euclidien, les types de dimensions de deux ensembles ne sont pas toujours comparables de cette façon (1).

La définition précédente conduit à admettre que $d\mathrm{E} = d\mathrm{F}$ si et seulement s'il existe à la fois une homéomorphie transformant E en un sous-ensemble de F et une homéomorphie transformant F en un sous-ensemble de E. Il est intéressant de remarquer que même dans le cas euclidien cette hypothèse n'entraîne pas nécessairement (2) l'existence d'une homéomorphie transformant E en F. Toutefois on déduit sans peine d'un théorème (3) de M. BANACH que, *dans l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général, l'hypothèse que* $d\mathrm{E} = d\mathrm{F}$ *entraîne l'existence de deux décompositions* :

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= e_1 + e_2, && e_1 \text{ et } e_2 \text{ étant disjoints,} \\ \text{et } \mathrm{F} &= f_1 + f_2, && f_1 \text{ et } f_2 \text{ étant disjoints,} \end{aligned}$$

telles qu'une homéomorphie transforme e_1 *en* f_1 *et qu'une homéomorphie transforme* e_2 *en* f_2.

---

(1) Pour un exemple à l'appui de cette assertion, voir *E. A.*, p. 48.
(2) Pour un exemple à l'appui de cette assertion, voir *E. A.*, p. 42.
(3) Voir pour ce théorème M. W. SIERPIŃSKI, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 90.

L'ensemble e de tous les points de l'espace $(\mathcal{N}_1)$ est dénombrable et il n'existe aucun point d'accumulation maximée de e. Donc l'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier n'est pas compact en soi au sens large, autrement dit n'est pas de classe C.

Soit maintenant $f(x)$ une fonctionnelle semi-continue supérieurement sur l'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier. Alors, le point a_n étant choisi, pour tout $\varepsilon > 0$ l'hypothèse que $x \in V_{a_n}$ entraîne

$$f(x) < f(a_n) + \varepsilon.$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$f(a_{n-1}) < f(a_n) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad f(a_{n+1}) < f(a_n) + \varepsilon,$$

d'où

$$f(a_{n-1}) \leqslant f(a_n) \qquad \text{et} \qquad f(a_{n+1}) \leqslant f(a_n).$$

Comme ces deux dernières inégalités ont lieu quel que soit n, on a

$$f(a_n) \leqslant f(a_{n+1}).$$

On a donc quel que soit l'entier n

$$f(a_n) = f(a_{n+1}).$$

Par conséquent chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur l'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier est constante sur cet espace. L'espace $(\mathcal{N}_1)$ tout entier est donc de classe S.

Nous disposons maintenant d'un espace $(\mathcal{V})$, à savoir l'espace $(\mathcal{N}_1)$, dans lequel $C \not\rightleftharpoons S$. De plus nous avons considéré au § X du Chapitre VII un espace (Si) qui était un espace $(\mathcal{V})$ dans lequel $A \not\rightleftharpoons B \not\rightleftharpoons C$. Enfin l'espace $(\mathcal{N})$ étudié il y a un instant était un espace $(\mathcal{V})$ dans lequel $C \not\rightleftharpoons S_1$. Comme l'espace $(\mathcal{N})$ vérifie la condition α), on a dans cet espace $C = S$ d'où $S \not\rightleftharpoons S_1$. Alors en juxtaposant les trois espaces (Si), $(\mathcal{N})$ et $(\mathcal{N}_1)$ sans y altérer les voisinages, on voit sans peine que l'on obtiendra un espace $(\mathcal{V})$ dans lequel on aura simultanément $A \not\rightleftharpoons B \not\rightleftharpoons C \not\rightleftharpoons S \not\rightleftharpoons S_1$.

Le théorème 10) est ainsi complètement établi.

§ VII. **Comparaison des types de dimensions de deux ensembles au moyen de la notion d'homéomorphie.** — Avant de terminer ce Chapitre il nous a paru intéressant d'indiquer très brièvement comment la notion d'homéomorphie (définie au § I) a été utilisée par M. Fréchet pour comparer ce qu'il appelle les *types de dimensions* (1) de deux ensembles.

On dit que le type de dimensions d'un ensemble E est inférieur

(1) Pour plus de détails sur cette question, nous renvoyons à l'ouvrage de M. Fréchet (*E. A.*, pp. 29-35).

b) Donnons maintenant un exemple d'espace accessible où $C \neq S_1$.

Pour cela appelons espace $(\mathcal{N})$ un espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les éléments d'un certain ensemble infini non-dénombrable P, et où on attribue à chaque point a tous les voisinages de la forme suivante :

$$V_a = (a) + C \text{ (un ensemble au plus dénombrable de points de P)}.$$

C désignant ici le complémentaire par rapport à P. On vérifie sans peine que l'espace $(\mathcal{N})$ est un espace accessible.

Soit alors $f(x)$ une fonctionnelle continue sur l'espace $(\mathcal{N})$ tout entier, et soient a et b deux points quelconques de cet espace. Donnons-nous un nombre positif ε ; alors il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in V_a$ entraîne

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Et il existe un voisinage V_b de b tel que l'hypothèse que $x \in V_b$ entraîne

$$|f(x) - f(b)| < \varepsilon, \tag{2}$$

Or

$$V_a = (a) + C(K), \qquad V_b = (b) + C(L),$$

K et L étant des ensembles au plus dénombrables ; d'où

$$C(K) \cdot C(L) = C(K + L) \subset V_a V_b.$$

$K + L$ étant au plus dénombrable, $C(K + L)$ ne peut être vide. Il existe donc un point $x \in V_a V_b$, et pour ce point x on a à la fois les relations (1) et (2). D'où

$$|f(a) - f(b)| < 2\varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi aussi petit que l'on veut, on doit avoir $f(a) = f(b)$. Donc chaque fonctionnelle continue sur l'espace $(\mathcal{N})$ tout entier est constante sur cet espace. L'espace $(\mathcal{N})$ tout entier est donc de classe S_1.

Par contre soit e un sous-ensemble dénombrable de l'espace $(\mathcal{N})$, et soit a un point arbitrairement choisi de cet espace. a admet le voisinage

$$V_a = (a) + C(e).$$

L'ensemble $e.V_a = e.(a)$ ne peut avoir même puissance que e ; donc a n'est jamais point d'accumulation maximée de e. Par conséquent l'espace $(\mathcal{N})$ tout entier n'est pas compact en soi au sens large, autrement dit n'est pas de classe C.

c) Donnons enfin un exemple d'espace $(\mathcal{V})$ où $A \neq B \neq C \neq S \neq S_1$.

Pour cela considérons d'abord un espace $(\mathcal{N}_1)$ qui est par définition un espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les éléments de la suite....., $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.., les n étant tous les entiers $<$, $=$ et > 0, et où on attribue à chaque point a_n l'unique voisinage

$$V_a = (a_{n-1}) + (a_n) + (a_{n+1}).$$

D = classe des ensembles possédant la propriété cantorienne restreinte.

(Nous disons qu'un ensemble E possède la *propriété cantorienne restreinte* si, pour chaque famille monotone (1) et dénombrable $\mathcal{F}$ de sous-ensembles non vides de E, il existe au moins un point de E commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, ou un point de E commun aux dérivés de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.)

Le théorème que nous avons en vue et qui peut être considéré comme la conclusion d'une importante partie de cet Ouvrage est alors le suivant :

* 10). *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* α) *on a* (2)

$$A = B = C = D = S \subset S_1.$$

Mais il existe des espaces ($\mathcal{V}$) *vérifiant* α) *et même des espaces accessibles où la classe* S_1 *est plus étendue que chacune des cinq classes* A, B, C, D et S. *Dans l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général subsistent les relations suivantes :*

$$A \subset B \subset C = D \subset S \subset S_1.$$

Mais il existe des espaces ($\mathcal{V}$) *où* $A \neq B \neq C \neq S \neq S_1$.

Démonstration de 10). — *a*) Il résulte des théorèmes 17), 18) et 22) du Chapitre VII et du théorème 8) du Chapitre actuel que dans l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général

$$A \subset B \subset C = D \subset S.$$

De plus, comme chaque fonctionnelle continue est semi-continue supérieurement, on voit sans peine que, dans un espace ($\mathcal{V}$), $S \subset S_1$.

Enfin il résulte du théorème 19) du Chapitre VII et des théorèmes 8) et 9) du Chapitre actuel que dans un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant α) on a :

$$A = B = C = S.$$

---

(1) Définie au § VII du Chapitre VII.

(2) L'identité $A = S$ (ou $C = S$) constitue à notre connaissance un résultat vraiment nouveau, non seulement dans les espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant α), mais aussi dans le cas plus particulier des espaces accessibles ; la même remarque s'applique aux identités $B = S$ et $D = S$. Par contre, dans le cas plus particulier encore des espaces distanciés, il résulte immédiatement d'un théorème de M. Fréchet (*Thèse*, Paris, 1906, p. 31) que $C = S_1$. On a donc dans un espace distancié

$$A = B = C = D = S = S_1.$$

Puis posons :

$$f(x) = \text{minimum de } p(V_x) \text{ pour tous les voisinages } V_x \text{ de } x.$$

Comme x n'est pas point d'accumulation maximée de e, $f(x)$ est un entier *fini* $\geqslant 0$. $f(x)$ est donc une fonctionnelle définie sur E. On a évidemment pour tout voisinage V_{a_n} de a_n :

$$p(V_{a_n}) \geqslant n, \quad \text{d'où} \quad f(a_n) \geqslant n.$$

$f(x)$ n'est donc pas bornée supérieurement sur E.

Ceci posé, soit a un point arbitraire de E. Il existe un voisinage V_a^o de a tel que

$$f(a) = p(V_a^o).$$

Alors l'hypothèse que $x \in E\,V_a^o$ entraîne l'existence d'un voisinage V_x de x tel que $V_x \subset V_a^o$, ce qui entraîne

$$f(x) \leqslant p(V_x) \leqslant p(V_a^o) = f(a).$$

Donc $f(x)$ est semi-continue supérieurement au point a. Par conséquent la fonctionnelle $f(x)$ est semi-continue supérieurement sur E sans être bornée supérieurement sur E contrairement à l'hypothèse.

C. Q. F. D.

Tenant compte du théorème 9) précédent et des résultats obtenus au Chapitre VII, nous allons pouvoir établir un théorème qui, d'une part, résumera tout ce que nous pourrons dire sur les réciproques des théorèmes 7) et 8), et qui, d'autre part, aura l'avantage de ramasser en un énoncé unique plusieurs des plus importantes simplifications introduites dans la théorie des ensembles compacts par la réalisation de la condition α). Pour énoncer ce théorème il nous sera commode d'adopter les notations suivantes ; nous posons dans l'espace ($\mathcal{V}$) considéré :

S = classe des ensembles E tels que chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur E soit bornée supérieurement sur E et atteigne sa borne supérieure en au moins un point de E.

S_1 = classe des ensembles E tels que chaque fonctionnelle continue sur E soit bornée sur E et atteigne ses bornes supérieure et inférieure en certains points de E.

A = classe des ensembles compacts en soi [1].

B = classe des ensembles possédant la propriété de Borel [1].

C = classe des ensembles compacts en soi au sens large [1].

---

[1] Définis au § VIII du Chapitre VII.

semble F de l'espace (Δ_s) ; et, en vertu du théorème 3), F est aussi compact en soi au sens large. Or il est facile de vérifier à partir de la définition du Chapitre VII que, dans l'espace (Δ_s), les ensembles compacts en soi au sens large ne sont autres que les ensembles bornés supérieurement, au sens usuel, et contenant leur borne supérieure. D'où le théorème suivant [1] :

8). *Si une fonctionnelle $f(x)$ est semi-continue supérieurement sur un ensemble* E *compact en soi au sens large, elle est bornée supérieurement sur* E *et elle atteint sa borne supérieure en au moins un point de* E.

§ VI. **Sur les réciproques des théorèmes 7) et 8).** — Les théorèmes 7) et 8) fournissent chacun une condition nécessaire pour qu'un ensemble soit compact en soi au sens large ; nous allons étudier la question de savoir si et dans quels cas ces conditions sont suffisantes. Pour cela nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

* 9) *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant la condition* α), *si chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur l'ensemble* E *est bornée supérieurement sur* E, *alors* E *est compact en soi au sens large* [2].

En effet supposons que l'ensemble E ne soit pas compact en soi au sens large. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable e de E tel qu'un point de E ne soit jamais point d'accumulation maximée de e. Désignons les points de e par $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$, les n étant tous les entiers naturels et les a_n tous distincts. Ceci étant, supposons que nous ayons adopté dans l'espace considéré des voisinages qui soient tous ouverts ; nous avons le droit de faire cette hypothèse en vertu de la condition α). Soit alors x un point arbitraire de E, et soit V_x un voisinage de x. Posons :

Si eV_x est vide, $p(V_x) = 0$.

Si eV_x est infini, $p(V_x) = +\infty$.

Si eV_x est fini, $p(V_x) =$ le plus grand indice des a_n contenus dans V_x.

---

(1) Dû à M. Fréchet (*E. A.*, p. 236).

(2) Dans cet énoncé les mots « au sens large » n'ajoutent rien puisque la condition α) est réalisée. Ce théorème 9) exprime un résultat qui, à notre connaissance, est vraiment nouveau même dans le cas plus particulier des espaces accessibles.

De même, en vertu du théorème 3), si E est compact en soi au sens large, F est aussi compact en soi au sens large. Or, sur la droite euclidienne, les ensembles compacts en soi au sens large ne sont autres que les ensembles à la fois bornés et fermés, et de tels ensembles contiennent leurs bornes supérieure et inférieure. D'où le théorème suivant [1] :

7) *Si une fonctionnelle $f(x)$ est continue sur un ensemble* E *compact en soi au sens large, elle est bornée sur* E *et elle atteint ses bornes supérieure et inférieure en certains points de* E.

§ V. **Sur les fonctionnelles semi-continues.** — Soit (Δ_s) l'espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les nombres réels et où la définition suivante Δ_s des voisinages est adoptée : on attribue à chaque nombre réel y tous les voisinages de la forme

$$V_y^\varepsilon = \text{ensemble des nombres réels} < y + \varepsilon,$$

ε étant un nombre réel positif arbitraire [2].

Par définition nous dirons qu'une fonctionnelle est *semi-continue supérieurement* si elle est Δ_s-continue.

On voit sans peine que cette définition peut se mettre sous la forme équivalente suivante qui peut être considérée comme classique :

Une fonctionnelle $y = f(x)$ définie sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathcal{V})$ est *semi-continue supérieurement* au point a de E si, pour chaque nombre positif ε, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in EV_a$ entraîne

$$f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Une fonctionnelle définie sur E et semi-continue supérieurement en chaque point de E sera dite *semi-continue supérieurement sur* E.

Soit alors $y = f(x)$ une fonctionnelle semi-continue supérieurement sur un ensemble E compact en soi au sens large. Cette fonctionnelle est une transformation continue de E en un en-

---

(1) Les théorèmes 6) et 7) sont dus à M. Fréchet (*E. A.*, p. 236) qui les a démontrés directement.

(2) On voit sans peine que l'espace (Δ_s) est un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant la condition α) mais ne satisfaisant pas à la condition 3° de F. Riesz. L'espace (Δ_s) n'est donc ni un espace distancié, ni même un espace accessible.

un certain choix de Δ nous obtiendrons les fonctionnelles dites continues ; pour d'autres choix de Δ nous obtiendrons les fonctionnelles dites semi-continues. L'introduction de la Δ–continuité nous permettra de montrer que des propriétés tout à fait importantes des fonctionnelles continues et semi-continues ne sont que des cas particuliers de certains théorèmes généraux concernant les transformations continues (à savoir des théorèmes 1) et 3) de ce Chapitre).

§ IV. **Sur les fonctionnelles continues.** — Appelons Δ_0 la définition suivante des voisinages dans l'ensemble des nombres réels : les voisinages de chaque nombre réel y sont les intervalles ouverts de centre y. Alors l'espace (Δ_0) n'est autre que la droite euclidienne où les points d'accumulation sont définis comme d'habitude.

Par définition nous dirons qu'une fonctionnelle est *continue* si elle est Δ_0–continue.

On vérifie sans peine que cette définition peut se mettre sous la forme équivalente suivante qui peut être considérée comme la forme classique :

Une fonctionnelle $y = f(x)$ définie sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathcal{V})$ est *continue au point a de* E si, pour chaque nombre positif ε, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in EV_a$ entraîne

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon.$$

Comme pour les transformations, une fonctionnelle définie sur E et continue en chaque point de E sera dite *continue sur* E.

Soit alors une fonctionnelle continue sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathcal{V})$. Cette fonctionnelle est une transformation continue de E en un ensemble F de points de la droite euclidienne (Δ_0). En vertu du théorème 1), si E est connexe, F est aussi connexe. Or, sur la droite euclidienne, si un ensemble connexe contient les nombres réels a et b, il contient aussi tous les nombres réels compris entre a et b. D'où le théorème suivant :

6) *Si une fonctionnelle $f(x)$ continue sur un ensemble* E *connexe prend sur* E *les valeurs a et b, elle prend aussi sur* E *toutes les valeurs comprises entre a et b.*

proposition suivante : Toute transformation continue transforme un ensemble à la fois borné et fermé en un ensemble à la fois borné et fermé. On sait par contre que, dans l'espace euclidien, une transformation continue, et même une homéomorphie, peut transformer un ensemble fermé en un ensemble non fermé et un ensemble borné en un ensemble non borné. Ce dernier résultat montre que les théorèmes 3) et 4) cessent d'être exacts si on y supprime les mots « en soi ».

Enfin, si nous tenons compte du fait que les points d'accumulation maximée et hyper-maximée coïncident dans un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant la condition α), nous voyons que le théorème 2) entraîne la proposition suivante :

* 5). *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant la condition* α), *toute transformation continue transforme un ensemble* $\aleph_\alpha$*–condensé en soi* (1) *en un ensemble de même nature.*

§ III. **Sur les modes de continuité des fonctionnelles.** — Soit E un ensemble de points d'un espace $(\mathcal{V})$. Supposons qu'à chaque point x de E corresponde un nombre réel $y = f(x)$ bien déterminé ; alors on dit que $y = f(x)$ est une *fonctionnelle univoque* ou plus simplement une *fonctionnelle* définie sur E.

Les fonctionnelles peuvent être considérées comme des cas particuliers des transformations définies au § I. Soit en effet (Δ) un espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les nombres réels et où une certaine définition Δ des voisinages a été adoptée. On peut alors dire que la fonctionnelle $y = f(x)$ est une transformation de E en un certain ensemble F de points de l'espace (Δ).

Nous avons défini au § I ce que nous entendions par transformation continue en un point a de E et par transformation continue sur E. Ceci nous permet d'adopter la définition suivante :

Une fonctionnelle $y = f(x)$ définie sur un ensemble E de points d'un espace $(\mathcal{V})$ sera dite Δ*–continue* au point a de E (sur E) si elle est continue au point a de E (sur E) en tant que transformation de E en un ensemble de points de l'espace (Δ).

Ainsi à chaque choix particulier de la définition Δ des voisinages dans l'ensemble des nombres réels correspondra une certaine manière d'entendre la continuité des fonctionnelles. Pour

(1) Défini au § IV du Chapitre VIII.

transformation $y = \mathrm{T}(x)$ *continue sur* E, *transforme* E *en un ensemble* F *jouissant de la même propriété.*

En effet supposons que f soit un sous-ensemble de F vérifiant puis. $f = \aleph_\alpha$. Chaque point y de f est le transformé d'un ou plusieurs points de E ; aussi nous pouvons supposer que l'on ait fait correspondre à chaque point y de f un point bien déterminé x_y de E tel que

$$y = \mathrm{T}(x_y) \tag{1}$$

Soit alors e l'ensemble de tous ces points x_y. Puisque $\mathrm{T}(x)$ est univoque, la relation (1) montre qu'à deux points y distincts de f correspondent nécessairement deux points x_y de e différents. Donc la correspondance établie entre les éléments de f et les éléments de e est biunivoque, et puis. $e = \aleph_\alpha$. Par conséquent il existe un point a de E qui est point d'accumulation maximée de e. Soit $b = \mathrm{T}(a)$ et soit V_b un voisinage arbitraire de b. Puisque $\mathrm{T}(x)$ est continue sur E, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in \mathrm{EV}_a$ entraîne que $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{V}_b$. Or V_a contient $\aleph_\alpha$ points distincts de e ; ces points appartiennent à EV_a et sont par conséquent transformés biunivoquement en $\aleph_\alpha$ points distincts de $f\mathrm{V}_b$. Donc

$$\aleph_\alpha = \text{puis. } f = \text{puis. } (f\mathrm{V}_b)$$

et le point b de F est point d'accumulation maximée de f.

C. Q. F. D.

Si nous nous reportons maintenant aux définitions admises au Chapitre VII, nous voyons que le théorème 2) admet les cas particuliers suivants :

* 3). *Toute transformation continue transforme un ensemble compact en soi au sens large en un ensemble de même nature.*

* 4). *Toute transformation continue transforme un ensemble parfaitement compact en soi au sens large en un ensemble de même nature.*

Rappelons d'ailleurs que, dans un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant la condition α), les mots « au sens large » n'ajoutent rien et peuvent être supprimés sans inconvénient [1].

Dans l'espace euclidien les théorèmes 3) et 4) se réduisent à la

---

[1] Les théorèmes 3) et 4) doivent être considérés comme dus à M. Fréchet dans le cas plus particulier encore des espaces accessibles (*E. A.*, p. 247).

1). *Toute transformation continue transforme un ensemble connexe en un ensemble connexe* (1).

En effet soit E un ensemble connexe, et soit $y = \mathrm{T}(x)$ une transformation continue sur E et transformant E en un ensemble F. Supposons que $\mathrm{F} = \mathrm{G} + \mathrm{H}$, G et H étant non vides et disjoints ; et posons :

$$\mathrm{K} = \text{ensemble des points } x \text{ de E tels que } \mathrm{T}(x) \in \mathrm{G},$$
$$\mathrm{L} = \text{ensemble des points } x \text{ de E tels que } \mathrm{T}(x) \in \mathrm{H}.$$

On a $\mathrm{E} = \mathrm{K} + \mathrm{L}$; de plus K et L sont nécessairement non vides et disjoints. Par conséquent

$$\mathrm{KL}' + \mathrm{K}'\mathrm{L} \neq 0$$

et il existe, par exemple, un point a vérifiant

$$a \in \mathrm{K} \quad \text{et} \quad a \in \mathrm{L}',$$

d'où

$$b = \mathrm{T}(a) \in \mathrm{G}.$$

Soit alors V_b un voisinage arbitraire de b ; il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in \mathrm{EV}_a$ entraîne que $\mathrm{T}(x) \in \mathrm{V}_b$. Or V_a contient un point ξ de L, et on a par conséquent $\mathrm{T}(\xi) \in \mathrm{V}_b$ et $\mathrm{T}(\xi) \in \mathrm{H}$, d'où $\mathrm{T}(\xi) \neq b$. Donc $b \in \mathrm{H}'$ et par conséquent $\mathrm{GH}' \neq 0$. Ainsi G et H sont toujours mutuellement connexes ; donc F est connexe.

C. Q. F. D.

Par contre il serait très facile de construire, même dans l'espace euclidien, des exemples de transformations continues et même d'*homéomorphies qui ne transforment pas nécessairement un ensemble bien enchaîné en un ensemble bien enchaîné*. C'est le cas par exemple de l'inversion au sens de la géométrie élémentaire.

Nous allons maintenant examiner comment les diverses notions d'ensemble compact, définies au Chapitre VII, se comportent vis-à-vis des transformations continues. Pour cela nous commencerons par démontrer le théorème suivant :

* 2). *Soit un ensemble* E *jouissant de la propriété suivante : pour tout sous-ensemble* e *de* E *tel que* puis. $e = \aleph_\alpha$ *il existe un point de* E *qui est point d'accumulation maximée de* e. *Alors toute*

(1) Ce théorème 1) est dû à M. Fréchet (*E. A.*, p. 241).

CHAPITRE IX

SUR LES TRANSFORMATIONS ET FONCTIONNELLES DANS LES ESPACES $(\mathcal{V})$

§ I. **Les transformations continues.** — Soient E et F deux ensembles appartenant respectivement à deux espaces $(\mathcal{V})$ distincts ou non. Nous dirons que $y = T(x)$ est une *transformation univoque* ou, plus simplement, une *transformation* de E en F si elle fait correspondre à chaque point x de E un point unique $y = T(x)$ de F, F étant l'ensemble des points $T(x)$.

Une transformation $y = T(x)$ univoque de E en F sera dite *continue* au point a de E si, pour chaque voisinage V_b de $b = T(a)$, il existe un voisinage V_a de a tel que l'hypothèse que $x \in EV_a$ entraîne que $T(x) \in V_b$. Si la transformation $y = T(x)$ est continue en chaque point a de E, elle sera simplement dite *continue*, ou, si l'on préfère, *continue sur* E. Une transformation qui est à la fois univoque et continue de E en F et de F en E, autrement dit biunivoque et bicontinue, est appelée *homéomorphie*. Il est intéressant d'étudier les diverses notions définies dans les Chapitres précédents au point de vue de leur invariance relativement aux transformations continues ; ce sera l'objet du § II suivant.

Remarque. — Si nous adoptons pour chaque point a comme famille de voisinages, la famille de tous les ensembles auxquels a est intérieur, ce que nous avons toujours le droit de faire (voir Chapitre I), la définition précédente des transformations continues prendra une forme équivalente qui aura l'avantage d'être plus intrinsèque.

§ II. **Quelques propriétés des transformations continues.** — Démontrons le théorème suivant :

* *Dans un espace distancié il y a identité* [1] *entre un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable, un ensemble $\aleph_\alpha$–séparable, un ensemble possédant la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_\alpha$ et un ensemble $\aleph_\alpha$–condensé en soi.*

De plus il résulte d'un théorème de M. Fréchet [2] que *dans un espace distancié tout ensemble compact est $\aleph_0$–séparable et par conséquent aussi $\aleph_0$–parfaitement séparable* ; mais la réciproque n'a même pas lieu dans l'espace euclidien.

---

(1) Ces identités sont plus simples que certaines identités analogues obtenues à partir de définitions différentes par M. Haratomi (*Mémoire cité*, p. 120 et 127).

(2) E. A., p. 268.

Par conséquent à deux ensembles distincts g de B correspondent nécessairement deux sous-familles $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$ différentes. D'où

$$\text{puis. B} \leqslant \text{puis.} \begin{pmatrix}\text{famille de toutes les} \\ \text{sous-familles de } \mathcal{F}\end{pmatrix} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$$

C. Q. F. D.

Le théorème 9) entraîne la proposition suivante :

* 10). *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* 3° *de F. Riesz tout ensemble* $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable* E *est de puissance* $\leqslant 2^{\aleph_\alpha}$.

En effet, dans un tel espace, les sous-ensembles de E formés chacun d'un seul point sont fermés. On a donc, en reprenant les notations du théorème 9),

$$\text{puis. E} \leqslant \text{puis. B} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons utilisé au Chapitre III un espace ($\mathcal{E}_3$) dont voici la définition. Les points de cet espace sont les éléments d'un ensemble donné quelconque P comprenant plus de deux éléments ; on attribue à chaque point a le voisinage unique

$$V_a = P = \text{espace entier.}$$

Nous avions vu que cet espace était un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant les conditions 2° de F. Riesz et α). Il est visible que l'espace ($\mathcal{E}_3$) est $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable quel que soit $\aleph_\alpha$; en particulier l'espace ($\mathcal{E}_3$) est $\aleph_0$–parfaitement séparable ; et pourtant sa puissance peut être choisie aussi grande que l'on veut. Donc * *le théorème* 10) *ne s'étend même pas à tous les espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz et* α).

§ VIII. **Cas des espaces distanciés.** — Il nous a paru intéressant de mentionner ici un certain nombre de simplifications qui se produisent dans la théorie des ordres de séparabilité quand on se place dans le cas des espaces ($\mathcal{D}$) ou distanciés (1). Nous avons pu établir le théorème suivant dont la démonstration sera publiée dans un autre recueil :

---

(1) Les espaces distanciés sont certains espaces accessibles comme nous l'avons vu à la fin du Chapitre VII.

§ VII. **Sur quelques propriétés liées à la puissance d'un ensemble $\aleph_\alpha$-parfaitement séparable.** — Soit N un ensemble de nombre cardinal $\aleph_\alpha$. Nous poserons par définition :

$2^{\aleph_\alpha}$ = puissance de l'ensemble de tous les sous-ensembles de N.

Nous rappelons que (voir l'Introduction au Chapitre VII)

$$2^{\aleph_0} = c = \text{puissance du continu.}$$

Ceci étant, nous allons démontrer le théorème suivant :

• 9). *Soit* E *un ensemble* $\aleph_\alpha$*-parfaitement séparable, soit* A *la famille des sous-ensembles ouverts de* E *et soit* B *la famille des sous-ensembles fermés de* E ; *on a*

$$\text{puis. A} \leqslant 2^{\aleph_\alpha} \qquad \textit{et} \qquad \text{puis. B} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}.$$

Démonstration. — Par hypothèse on peut adopter pour les différents points de E des voisinages appartenant à une même famille $\mathcal{F}$ d'ensembles telle que puis. $\mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha$. Nous supposerons que de tels voisinages ont été adoptés. Soit alors e un ensemble de A, et soit

$\mathcal{F}_1$ = famille de ceux des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont entièrement contenus dans e.

Pour chaque point a de e il existe un voisinage V_a de a appartenant entièrement à e. Un tel V_a est un ensemble de $\mathcal{F}_1$, et par conséquent

$$e = \text{somme de tous les ensembles de } \mathcal{F}_1.$$

Nous déduisons de cette égalité qu'à deux ensembles distincts e de A correspondent nécessairement deux sous-familles $\mathcal{F}_1$ de $\mathcal{F}$ différentes. D'où

$$\text{puis. A} \leqslant \text{puis.} \begin{pmatrix}\text{famille de toutes les} \\ \text{sous-familles de } \mathcal{F}\end{pmatrix} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}.$$

Soit maintenant g un ensemble de B, et soit

$\mathcal{F}_2$ = famille de ceux des ensembles de $\mathcal{F}$ qui sont entièrement contenus dans $C(g)$,

$C(g)$ désignant comme d'habitude le complémentaire de g par rapport à l'espace. Puisque g est fermé, $C(g)$ est ouvert, et on déduit de là sans peine que

$$C(g) = (\text{somme de tous les ensembles de } \mathcal{F}_2) + C(E).$$

Or on a

$$E \cdot \text{intérieur de } I_a = N \cdot \text{intérieur de } I_a + R \cdot \text{intérieur de } I_a,$$
$$\text{puis. }(R \cdot \text{intérieur de } I_a) \leqslant \aleph_\alpha.$$

Par conséquent, en vertu du théorème VI rappelé à l'instant, on a

$$\text{puis. }(N \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis. }(E \cdot \text{intérieur de } I_a) \geqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

Donc chaque point a de N est un $\aleph_{\alpha+1}$–hyperpoint de N. Il en résulte que chaque point de N est un point d'accumulation de N ; par conséquent N est dense en soi.

C. Q. F. D.

Il résulte du théorème 5) précédent que si E est un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable et de puissance $> \aleph_\alpha$, alors E contient un sous-ensemble N non vide et dense en soi, et par conséquent E n'est pas clairsemé. D'où le théorème suivant (1) :

* 6). *Tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable et clairsemé est de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$.*

Si nous combinons ce théorème 6) avec les théorèmes 2) et 3) du Chapitre V et si nous tenons compte du fait que chaque partie d'un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable, nous obtenons les propositions suivantes :

* 7). *Tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est la somme de deux ensembles disjoints, l'un dense en soi, l'autre clairsemé et de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ (l'un ou l'autre de ces deux ensembles pouvant être vide).*

* 8). *Tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable et fermé est la somme de deux ensembles disjoints, l'un parfait, l'autre clairsemé et de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ (l'un ou l'autre de ces deux ensembles pouvant être vide).*

De plus on obtient les deux décompositions précédentes en prenant pour premier ensemble partiel le plus grand sous-ensemble dense en soi de l'ensemble donné (voir Chapitre V, § II).

(1) Les théorèmes 6), 7), 8), 9) et 10) de ce Chapitre fournissent le résultat le plus précis possible si $\aleph_\alpha$ est l'*ordre* de l'ensemble considéré. Ces théorèmes s'appliquent d'ailleurs toujours en prenant pour $\aleph_\alpha$ l'*ordre* de l'espace ($\mathfrak{V}$) auquel appartient l'ensemble considéré, mais le résultat obtenu peut alors être moins précis.

de plus chaque point de N *est un* $\aleph_{\alpha+1}$*–hyperpoint de* N, *et par conséquent* N *est dense en soi* [1].

Démonstration. — *a*) Supposons que puis. R $> \aleph_\alpha$. Dans cette hypothèse on a puis. R $\geqslant \aleph_{\alpha+1}$, et R contient un sous-ensemble *e* de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Or R est une partie de l'ensemble E qui est $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable ; donc R est $\aleph_\alpha$–condensé en soi ; et par conséquent il existe un point *a* de R tel que *a* soit point d'accumulation hyper-maximée de *e*. Alors, pour tout ensemble I_a auquel *a* est intérieur, on a

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis. } e = \aleph_{\alpha+1}$$

d'où

$$\text{puis. } (E \cdot \text{intérieur de } I_a) \geqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

Donc *a*, qui est un point de E, est un $\aleph_{\alpha+1}$–hyperpoint de E. Par conséquent on devrait avoir $a \in N$ en même temps que

$$a \in R = E - N,$$

ce qui est contradictoire. Ainsi nous avons démontré que

$$\text{puis. } R \leqslant \aleph_\alpha.$$

b) Tenant compte du résultat précédent, du fait que l'on a les relations

$$E = N + R, \qquad \text{puis. } E > \aleph_\alpha,$$

et du théorème VI de l'Introduction au Chapitre VII, nous voyons que l'on a

$$\text{puis. } N = \text{puis. } E.$$

c) Enfin soit *a* un point arbitraire de N. Alors *a* est un $\aleph_{\alpha+1}$–hyperpoint de E ; par conséquent, pour tout ensemble I_a auquel *a* est intérieur, on a

$$\text{puis} \cdot (E \cdot \text{intérieur de } I_a) \geqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

---

(1) Il ne faudrait pas croire qu'un théorème aussi général que le théorème 5) soit sans intérêt dans l'espace euclidien. En effet tous les ensembles de l'espace euclidien sont $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables quel que soit $\aleph_\alpha$; le théorème 5) s'applique donc tout d'abord aux ensembles euclidiens lorsqu'on y fait $\aleph_\alpha = \aleph_0$ et il fournit dans ce cas un résultat classique. De plus, si l'*hypothèse du continu* $\aleph_1 = c$ (*c* étant la puissance du continu) n'était pas exacte, le théorème 5) fournirait dans l'espace euclidien des propriétés différentes et ne rentrant pas les unes dans les autres pour chacun des $\aleph_\alpha < c$.

une sous-famille $\mathcal{G}_1$ couvrant R telle que puis. $\mathcal{G}_1 \leqslant \aleph_\alpha$. Les éléments de la famille $\mathcal{G}_1$ sont des voisinages de certains points de R ; et ces points de R forment un ensemble e vérifiant puis. $e \leqslant \aleph_\alpha$. Par conséquent, en vertu des raisonnements faits il y a un instant, il doit exister un point y de R tel que tout élément de e précède y. Mais alors y ne pourrait appartenir à aucun ensemble de $\mathcal{G}_1$. Nous aboutissons donc à une contradiction et le résultat que nous avions en vue est établi.

Remarque. — En vertu des résultats obtenus dans ce §, l'espace (R) est un espace accessible compact en soi et jouissant par conséquent de la propriété de Borel. Mais, comme cet espace ne possède pas la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_\alpha$, cet espace ne possède pas la propriété de Borel-Lebesgue et n'est donc pas parfaitement compact en soi.

§ VI. **Sur diverses généralisations du théorème de Cantor-Bendixson.** — Faisons d'abord les remarques suivantes que nous utiliserons tout à l'heure : Les théorèmes 2) et 4) entraînent évidemment que tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est $\aleph_\alpha$–condensé en soi. De plus il est évident, d'après la définition même, que chaque partie d'un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable. Par conséquent tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est tel que chacune de ses parties soit $\aleph_\alpha$–condensée en soi. Ces préliminaires posés, nous adoptons la définition suivante :

Un point a sera dit un $\aleph_\alpha$*–hyperpoint* d'un ensemble E si, pour tout ensemble I_a auquel a est intérieur, on a

$$\text{puis. } (\text{E} \cdot \text{intérieur de } I_a) \geqslant \aleph_\alpha.$$

Démontrons alors le théorème suivant :

* 5). *Soit* E *un ensemble* $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable et de puissance* $> \aleph_\alpha$. *Alors, si l'on pose*

$$\text{N} = \textit{ensemble de ceux des points de } \text{E}$$
$$\textit{qui sont des } \aleph_{\alpha+1}\textit{–hyperpoints de } \text{E}$$

et

$$\text{R} = \text{E} - \text{N},$$

on a la décomposition

$$\text{E} = \text{N} + \text{R},$$

et on a

$$\text{puis. R} \leqslant \aleph_\alpha,$$
$$\text{puis. N} = \text{puis. E};$$

On vérifie sans peine que l'espace (R) est un espace accessible. Nous poserons pour tout point x de R :

R_x = ensemble des éléments de R qui précèdent x.

Ceci étant, supposons de plus que l'on a choisi R normalement bien ordonné et de puissance $\aleph_{\alpha+2} = \aleph_{\alpha+1+1}$. Nous avons le droit de faire cette hypothèse en vertu du théorème VIII de l'Introduction au Chapitre VII. Soit alors e un sous-ensemble de R tel que

$$\aleph_0 \leqslant \text{puis. } e \leqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

Je dis qu'il existe au moins un élément y de R tel que tout élément de e précède y. En effet dans le cas contraire on aurait

$$R = \sum_e [R_x + (x)],$$

cette somme étant étendue à tous les éléments x de e. Or on a, pour tout élément x de R,

$$\text{puis. } R_x \leqslant \aleph_{\alpha+1} \quad , \quad \text{d'où} \quad \text{puis. } [R_x + (x)] \leqslant \aleph_{\alpha+1}.$$

On devrait donc avoir (en vertu du théorème rappelé au début du § IV de ce Chapitre) puis. R $\leqslant \aleph_{\alpha+1}$, contrairement à l'hypothèse. L'existence de l'élément y est donc établie.

Ceci posé, pour $\xi = y$ on a évidemment

$$\text{puis. } (eR_\xi) = \text{puis. } e \tag{1}$$

Parmi les points ξ de R tels que la relation (1) ci-dessus ait lieu, il en existe un a qui n'est précédé d'aucun autre. Soit alors V_a un voisinage quelconque de ce point a. On a

$$\begin{aligned} V_a = {} & \text{ensemble des points } x \text{ de R} \\ & \text{tels que } b < x \leqslant a, \end{aligned}$$

b étant un point de R tel que $b < a$. On peut écrire

$$eR_b + e \cdot (b) + eV_a = eR_a + e \cdot (a).$$

La puissance du second membre de cette égalité est puis. e ; de plus on a puis. $(eR_b) \neq$ puis. e. Par conséquent, en vertu du théorème VI de l'Introduction au Chapitre VII, on doit avoir puis. (eV_a) = puis. e. a est donc point d'accumulation maximée de e. Comme la condition α) est vérifiée, il en résulte que a est aussi point d'accumulation hypermaximée de e. Nous concluons de là que l'espace (R) est $\aleph_\alpha$-condensé en soi. Nous en concluons aussi, ce qui nous servira plus loin, que l'espace (R) est compact en soi.

Par contre, nous allons démontrer que l'espace (R) ne possède pas la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_\alpha$. En effet supposons que l'espace (R) possède cette propriété, et appelons $\mathcal{G}$ la famille formée de tous les voisinages de tous les points de R. Alors $\mathcal{G}$ couvre R, et $\mathcal{G}$ doit contenir

Ceci étant, la famille des I_a correspondant à tous les points a de E, couvre E. Donc cette famille contient une sous-famille $\mathcal{G}_1$ couvrant E telle que

$$\text{puis. } \mathcal{G}_1 \leqslant \aleph_\alpha \leqslant \eta.$$

On a évidemment

$$\sum_{\mathcal{G}_1} e \cdot \text{intérieur de } I_a = e,$$

cette somme étant étendue à tous les ensembles I_a de $\mathcal{G}_1$. Par conséquent, en vertu du théorème rappelé au début de ce §, on devrait avoir puis. $e = \xi < \eta$. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Il nous sera commode d'adopter la définition suivante :

Un ensemble E est $\aleph_\alpha$*–condensé en soi* si, pour chaque sous-ensemble e de E tel que puis. $e = \aleph_{\alpha+1}$, il existe au moins un point de E qui soit point d'accumulation hyper-maximée de e.

Si on avait puis. $E < \aleph_{\alpha+1}$, il n'existerait pas de sous-ensemble e de E tel que puis. $e = \aleph_{\alpha+1}$; dans ce cas nous considérerions conventionnellement E comme étant toujours $\aleph_\alpha$–condensé en soi.

Cette définition étant admise, comme $\aleph_{\alpha+1}$ est nécessairement de 1re espèce, on a le cas particulier suivant du théorème 3) :

* 4). *Tout ensemble possédant la propriété lindelöfienne d'ordre* $\aleph_\alpha$ *est* $\aleph_\alpha$*–condensé en soi.*

§ V. **Sur la réciproque du théorème** 4). — Nous allons démontrer que * *la réciproque du théorème* 4) *n'est pas toujours vraie* (1) *même dans un espace accessible.*

Pour cela appelons espace (R) un espace ($\mathcal{V}$) dont les points sont les éléments d'un certain ensemble ordonné R, et où on attribue à chaque point a de R tous les voisinages de la forme suivante :

$$V_a = \text{ensemble des points } x \text{ de R tels que } b < x \leqslant a,$$

b étant un point quelconque de R tel que $b < a$. (Nous écrivons pour simplifier $b < a$, par exemple, pour dire que b précède a). Si a était un élément de R précédant tous les autres, nous poserions $V_a = (a)$.

(1) Il serait intéressant de savoir si la même circonstance se produit ou non pour le théorème 3).

séparable. *La réciproque du théorème* 2) *précédent n'est donc même pas vraie dans tout espace accessible.*

§ IV. **Les ensembles $\aleph_\alpha$–condensés en soi.** — Rappelons d'abord la proposition suivante [1] que nous utiliserons dans un instant et dont la démonstration suppose l'axiome de ZERMELO :

Soit η *un nombre cardinal* $\geqslant \aleph_0$. *Si* E *est un ensemble de puissance* $\leqslant \eta$ *dont les éléments sont des ensembles* M *dont chacun a une puissance* $\leqslant \eta$, *alors la somme de tous les ensembles* M *de* E *a aussi une puissance* $\leqslant \eta$.

Adoptons de plus la terminologie suivante :

a) Nous dirons qu'un nombre cardinal ξ est de 1re *espèce* si, parmi les nombres cardinaux $< \xi$, il en existe un qui est le plus grand. Dans le cas contraire nous dirons que le nombre cardinal ξ est de 2me *espèce.* Alors $\aleph_n$ est de 1re espèce pour tout entier positif n, tandis que $\aleph_0$ et $\aleph_\omega$, par exemple, sont de 2me espèce.

b) Si $\aleph_\alpha$ est un nombre cardinal transfini quelconque, nous désignerons par $\aleph_{\alpha+1}$ le plus petit des nombres cardinaux $> \aleph_\alpha$. Le nombre $\aleph_{\alpha+1}$ existe toujours en vertu des théorèmes III et V de l'Introduction au Chapitre VII.

Ces préliminaires étant posés, nous allons démontrer le théorème suivant :

* 3). *Tout ensemble* E *possédant la propriété lindelöfienne d'ordre* $\aleph_\alpha$ *jouit de la propriété suivante :*

$\mathfrak{L}_\alpha$. *Pour chaque sous-ensemble e de* E *tel que le nombre cardinal de e soit de* 1re *espèce et* $> \aleph_\alpha$, *il existe au moins un point de* E *qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.*

En effet, soit E un ensemble possédant la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_\alpha$, et soit e un sous-ensemble de E tel que le nombre cardinal ξ de e soit de 1re espèce et $> \aleph_\alpha$.

Supposons qu'il n'existe aucun point de E qui soit point d'accumulation hyper-maximée de e. Alors, pour chaque point a de E, il existe un ensemble I_a auquel a est intérieur tel que

$$\text{puis.}\ (e \cdot \text{intérieur de } I_a) < \text{puis.}\ e = \xi$$

Soit η le plus grand nombre cardinal $< \xi$; le nombre η existe par hypothèse et on a

$$\text{puis.}\ (e \cdot \text{intérieur de } I_a) \leqslant \eta,$$
$$\aleph_\alpha \leqslant \eta.$$

---

[1] Cette proposition est une conséquence immédiate de résultats obtenus dans l'ouvrage de M. W. SIERPINSKI « Leçons sur les nombres transfinis » (Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 126 et 233).

§ III. Les propriétés lindelöfiennes. — L'objet de ce § est d'établir une propriété, intéressante en elle-même et utilisée plus loin, des ensembles $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables. Nous adoptons la définition suivante :

Un ensemble E possède la *propriété lindelöfienne* (1) *d'ordre* $\aleph_\alpha$ si chaque famille $\mathcal{G}$ d'ensembles couvrant E contient une sous-famille $\mathcal{G}_1$ couvrant E telle que puis. $\mathcal{G}_1 \leqslant \aleph_\alpha$.

Alors on a le théorème suivant :

* 2) *Tout ensemble* $\aleph_\alpha$*–parfaitement séparable possède la propriété lindelöfienne d'ordre* $\aleph_\alpha$.

En effet soit E un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable. Alors nous pouvons supposer que les voisinages des différents points de E appartiennent à une même famille $\mathcal{F}$ d'ensembles telle que

$$\text{puis. } \mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha.$$

Soit $\mathcal{G}$ une famille d'ensembles couvrant E. Appelons $\mathcal{F}_1$ la famille des ensembles V de $\mathcal{F}$ tels que chaque V soit contenu dans un ensemble de $\mathcal{G}$. Alors nous pouvons supposer que l'on ait fait correspondre à chaque ensemble V de $\mathcal{F}_1$ un ensemble I_V bien déterminé de $\mathcal{G}$ tel que

$$V \subset I_V.$$

Soit $\mathcal{G}_1$ la famille des ensembles I_V correspondant à tous les ensembles V de $\mathcal{F}_1$. On a

$$\text{puis. } \mathcal{G}_1 \leqslant \text{puis. } \mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha.$$

Je dis que $\mathcal{G}_1$ couvre E. En effet soit a un point arbitraire de E. Alors a est intérieur à un ensemble de $\mathcal{G}$, et il existe un voisinage V_a de a contenu dans cet ensemble de $\mathcal{G}$. V_a est donc un ensemble de $\mathcal{F}_1$, et il lui correspond l'ensemble I_{V_a} de $\mathcal{G}_1$ tel que $V_a \subset I_{V_a}$. Donc a est intérieur à I_{V_a}.

C. Q. F. D.

Remarque. — Il est presque évident que tout ensemble dénombrable possède la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_0$. Par conséquent l'espace (u), défini au § II, possède la propriété lindelöfienne d'ordre $\aleph_0$, et pourtant cet espace n'est pas $\aleph_0$–parfaitement

(1) Si $\alpha = 0$ cette propriété coïncide avec la propriété que M. Fréchet a appelée la propriété de Lindelöf (*E. A.*, p. 176).

doit contenir un W_q. Comme chaque V est évidemment infini, chaque W_q est infini. Nous pouvons donc poser pour chaque W_q :

$x_q =$ le plus petit entier $> q^2$ et appartenant à W_q.

x_q existe pour chaque W_q. Appelons E l'ensemble des nombres x_q. Soit alors n un entier positif arbitraire ; l'inégalité $x_q \leqslant n$ entraîne $q^2 < n$ d'où $q < \sqrt{n}$. On a donc toujours

$$n[E] < \sqrt{n}.$$

Soit C(E) le complémentaire de E par rapport à l'espace (u) ; on a

$$n \geqslant n[C(E)] = n - n[E] > n - \sqrt{n}$$

On en déduit immédiatement

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n[C(E)]}{n} = 1$$

De plus E ne contient pas 1, et par conséquent C(E) contient 1. Il en résulte que C(E) est un V ; et pourtant C(E) ne peut contenir entièrement aucun des W_q. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Démontrons enfin que l'espace (u), que nous venons d'étudier, est un espace accessible. En effet on vérifie de suite que tous les voisinages adoptés sont des ensembles ouverts ; donc l'espace (u) vérifie la condition α). De plus on constate sans peine que l'espace (u) satisfait à la condition 3° de F. Riesz. Il nous reste à établir que l'espace (u) vérifie la condition 2° de F. Riesz. Pour cela rappelons que la condition 2° de F. Riesz équivaut, dans un espace $(\mathfrak{V})$, à la condition suivante :

$(2^o)_3$ Pour tout point a et tous voisinages V_a et W_a de a, il existe au moins un voisinage de a appartenant au produit $V_a W_a$.

La condition $(2^o)_3$ est évidemment vérifiée en tout point $a \neq 1$ de l'espace (u). Soient maintenant V_1 et V_2 deux voisinages V de 1. Quel que soit l'entier positif n, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant n - n[V_1V_2] &= n[C(V_1V_2)] = n[C(V_1) + C(V_2)] \leqslant n[C(V_1)] + n[C(V_2)] \\ &= n - n[V_1] + n - n[V_2] \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leqslant 1 - \frac{n[V_1V_2]}{n} \leqslant 2 - \frac{n[V_1]}{n} - \frac{n[V_2]}{n}.$$

Si $n \to \infty$, le dernier membre de cette double inégalité $\to 0$; donc $\frac{n[V_1V_2]}{n} \to 1$. Par conséquent V_1V_2 est un voisinage V de 1. Il en résulte que $(2^o)_3$ est aussi vérifiée au point 1.

C. Q. F. D. (1)

(1) Dans notre définition de l'espace (u), nous nous sommes inspiré de la définition d'un espace imaginé par Urysohn (*Math. Annalen*, 94, 1925, p. 290).

raîtra seulement comme exprimant une propriété intéressante des ensembles $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables. Nous avons le théorème suivant :

* 1) *Tout ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable est $\aleph_\alpha$–séparable* [1].

En effet soit E un ensemble $\aleph_\alpha$–parfaitement séparable. Alors nous pouvons supposer que les voisinages des différents points de E forment une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles telle que

$$\text{puis. } \mathcal{F} \leqslant \aleph_\alpha.$$

Ceci étant supposé, prenons dans chaque ensemble V de $\mathcal{F}$ un point x_V de E, et soit N l'ensemble des points x_V distincts. On a

$$\text{puis. N} \leqslant \aleph_\alpha \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} \subset \mathrm{E}.$$

Soit alors a un point arbitraire de E. Chaque voisinage de a contient un point de N. Donc

$$a \in \mathrm{N} + \mathrm{N}'$$

C. Q. F. D.

Nous allons donner un exemple qui nous montrera que *la réciproque du théorème* 1) *précédent n'est pas toujours vraie même dans un espace accessible.*

Pour cela appelons espace (u) un espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont tous les entiers > 0 et où les voisinages sont définis de la façon suivante. On attribue à chaque entier > 1 un seul voisinage formé de cet entier lui-même. On attribue à l'entier 1 comme voisinages tous les ensembles V contenant 1, formés d'entiers > 0 et tels que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,[\mathrm{V}]}{n} = 1$$

$n[\mathrm{V}]$ désignant le nombre des éléments de V qui sont $\leqslant$ l'entier positif n.

L'espace (u) étant dénombrable, est $\aleph_0$-séparable.

Par contre, nous allons démontrer que l'espace (u) n'est pas $\aleph_0$-parfaitement séparable. En effet supposons que l'espace (u) soit $\aleph_0$-parfaitement séparable. Alors la famille des voisinages V de 1 devrait équivaloir à une famille finie ou dénombrable de voisinages de 1, soit $\mathrm{W}_1, \mathrm{W}_2, \ldots, \mathrm{W}_q, \ldots$ Alors chaque W_q doit contenir un V, et chaque V

[1] Ce théorème 1) est dû à M. Fréchet dans le cas particulier où $\aleph_\alpha = \aleph_0$; la même remarque s'applique à plusieurs autres propositions démontrées dans ce Chapitre, en particulier aux théorèmes 2), 6), 7), 8), 9) [et aussi à 10) dans le cas d'un espace accessible] (*E. A.*, p. 233-235 et p. 243).

Un ensemble E est *$\aleph_\alpha$–parfaitement séparable* si l'on peut, sans altérer l'opération de dérivation dans l'espace ($\mathcal{V}$) considéré, adopter pour les différents points x de E des voisinages appartenant à une même famille d'ensembles, cette famille, indépendante de x, ayant une puissance $\leqslant \aleph_\alpha$.

Un ensemble E est d'*ordre* $\aleph_\xi$ si $\aleph_\xi$ est le plus petit nombre cardinal transfini tel que E soit $\aleph_\xi$–parfaitement séparable [1].

On voit sans peine, en tenant compte du théorème V de l'Introduction au Chapitre VII, que, *pour tout ensemble* E *appartenant à un espace* ($\mathcal{V}$), *il existe un et un seul nombre cardinal transfini* $\aleph_\xi$ *tel que* E *soit d'ordre* $\aleph_\xi$.

De plus on a évidemment les propositions suivantes :

Si un ensemble E est d'ordre $\aleph_\xi$, alors, pour tout $\aleph_\alpha \geqslant \aleph_\xi$, l'ensemble E et chacun de ses sous-ensembles sont $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables.

Chaque sous-ensemble d'un ensemble d'ordre $\aleph_\xi$ est d'ordre $\leqslant \aleph_\xi$. En particulier, dans un espace ($\mathcal{V}$) d'ordre $\aleph_\xi$, tout ensemble est d'ordre $\leqslant \aleph_\xi$.

Il est intéressant de constater que l'espace euclidien et chacun de ses sous-ensembles sont d'ordre $\aleph_0$. Cette remarque permettrait de déduire des résultats de ce Chapitre un grand nombre de propriétés usuelles des ensembles euclidiens.

§ II. **Les ensembles $\aleph_\alpha$–séparables.** — Nous adoptons la définition suivante :

Un ensemble E est *$\aleph_\alpha$–séparable* [2] s'il existe un ensemble N de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ tel que $N \subset E \subset N + N'$.

Comme nous le verrons au § VIII, les ensembles $\aleph_\alpha$–séparables coïncident dans un espace distancié avec les ensembles $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables. Mais il n'en est plus ainsi dans les espaces ($\mathcal{V}$) les plus généraux ; dans ceux-ci la notion d'ensemble $\aleph_\alpha$–séparable jouera un rôle peu important et appa-

---

(1) Dans une Note parue antérieurement (C. R. de l'Acad. des Sc., t. 196, 1933, p. 1071) nous avions dit dans le même cas que l'ensemble E est d'*ordre* ξ, il nous paraît maintenant plus naturel de dire que E est d'*ordre* $\aleph_\xi$.

(2) Les ensembles $\aleph_\alpha$–séparables et $\aleph_\alpha$–parfaitement séparables se réduisent pour $\aleph_\alpha = \aleph_0$ aux ensembles séparables et parfaitement séparables définis par M. Fréchet (*E. A.*, p. 190) dans un espace ($\mathcal{V}$).

CHAPITRE VIII

SUR LES ORDRES DE SÉPARABILITÉ DANS LES ESPACES ($\mathfrak{V}$)

On sait que, dans l'espace euclidien, on peut déterminer de bien des manières un ensemble dénombrable N de points tel que chaque point de l'espace soit infiniment voisin de N, autrement dit appartienne à N'. Ce fait intervient plus ou moins explicitement dans les démonstrations de plusieurs propriétés importantes des ensembles euclidiens (1). C'est en cherchant à étendre ces propriétés aux espaces abstraits que M. Fréchet (2) a été amené à définir d'abord les ensembles séparables dans les espaces distanciés, puis, dans des espaces abstraits plus généraux, les ensembles parfaitement séparables à côté des ensembles séparables.

Plus récemment M. Haratomi (3) a généralisé la notion d'ensemble séparable en introduisant dans les espaces distanciés des ensembles qu'il appelle $\aleph_\alpha$*-separabel.* Dans ce Chapitre nous reprenons la question étudiée par M. Haratomi en nous plaçant dans le cas beaucoup plus général des espaces ($\mathfrak{V}$). Nos définitions, différentes de celles de M. Haratomi, auront d'ailleurs l'avantage de fournir, dans le cas particulier des espaces distanciés, des résultats plus simples que les siens (voir § VIII).

§ I. Les ensembles $\aleph_\alpha$-parfaitement séparables. — Nous adoptons dans un espace ($\mathfrak{V}$) les définitions suivantes, $\aleph_\alpha$ étant un nombre cardinal transfini arbitraire :

(1) Par exemple du théorème de Cantor-Bendixson.

(2) Voir par exemple *E. A.*, p. 190.

(3) « Über höherstufige Separabilität und Kompaktheit. » *Japanese Journ f Math.*, VIII, 1931, p. 114.

un espace accessible particulier ; les espaces distanciés sont donc des espaces ($\mathfrak{V}$) vérifiant la condition α), et ils bénéficient de toutes les simplifications dues à cette condition. De plus on doit à M. Fréchet [1] d'avoir établi les résultats suivants :

Dans un espace distancié, il y a identité entre un ensemble compact (en soi) et un ensemble parfaitement compact (en soi), et par conséquent il y a identité entre un ensemble possédant la propriété de Borel et un ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue. De plus il n'y a plus de différence à faire entre un ensemble compact en soi et un ensemble compact et fermé.

Remarquons enfin que dans l'espace euclidien, qui est un espace distancié particulier, les ensembles compacts coïncident avec les ensembles bornés, et les ensembles compacts en soi avec les ensembles à la fois bornés et fermés.

---

où l'opération de dérivation $E' = K(E)$ jouit de la propriété suivante : il est possible d'associer à tout couple a, b de points de l'espace considéré, un nombre réel

$$(a, b) = (b, a) \geqslant 0,$$

nombre qui est appelé *distance* de a et de b, et ceci de telle manière que les trois conditions suivantes soient remplies :

1. On a $(a, b) = 0$ si a et b coïncident et dans ce cas seulement.
2. Pour trois points quelconques a, b, c on a toujours

$$(a, b) \leqslant (a, c) + (c, b).$$

3. Pour qu'un point a appartienne à E', il faut et il suffit qu'il existe dans l'ensemble E des points distincts de a dont la distance à a soit aussi petite que l'on veut.

Beaucoup d'auteurs se bornent d'ailleurs à considérer les espaces distanciés où la distance (a, b) est effectivement donnée.

[1] *E. A.*, p. 269.

* 21) *Soit* E *un ensemble. Si pour chaque suite de la forme*

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

où les E_n *sont des sous-ensembles non vides de* E *et où les* n *sont tous les entiers naturels, il existe au moins un point* (*de* E) *commun aux fermetures de tous les* E_n, *alors* E *est compact* (*en soi*) *au sens large.*

En effet soit e un sous-ensemble dénombrable de E. Désignons les points de e par $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$, les n étant tous les entiers naturels et les a_n tous distincts, et posons

$$E_n = (a_n) + (a_{n+1}) + (a_{n+2}) + \cdots$$

On a

$$E \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \cdots$$

Alors, par hypothèse, il existe un point a (de E) commun à tous les $\overline{E}_n = E_n + E_n'$. Alors chaque voisinage de a contient un point de E_n, et ce quel que soit n. Donc chaquevoisinage de a contient une infinité dénombrable de points de e. Par conséquent a est point d'accumulation maximée de e.

C. Q. F. D.

Les deux propositions 20) et 21) précédentes permettent d'énoncer diverses conditions à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble soit compact (en soi) au sens large. 20) et 21) entraînent par exemple le théorême suivant :

* 22). *La condition* [1] *nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit compact* (*en soi*) *au sens large est que, pour chaque famille* $\mathfrak{F}$ *monotone et dénombrable de sous-ensembles non vides de* E, *il existe au moins un point de* E *commun à tous les ensembles de* $\mathfrak{F}$, *ou un point* (*de* E) *commun aux dérivés de tous les ensembles de* $\mathfrak{F}$.

§ XII. **Cas des espaces distanciés.** — Il nous a paru intéressant d'indiquer brièvement les principales simplifications qui se produisent dans la théorie de la compacité, quand on se place dans le cas des espaces ($\mathfrak{D}$) ou *distanciés* [2]. On sait qu'un espace distancié est

---

[1] Un théorème analogue à 22) a été obtenu par M. Fréchet (*Amer. journ. of math.*, janvier 1928, p. 52) : ce théorème qui énonce aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit compact (en soi) au sens large, est également une conséquence immédiate de 20) et de 21).

[2] Les espaces ($\mathfrak{D}$) ou distanciés ont été introduits par M. Fréchet (*E. A.*, p. 61-62). On peut définir un espace *distancié* comme étant un système (P, K)

il en résulte que ω est point d'accumulation maximée de e. Donc E est compact en soi au sens large. Nous voyons ainsi que la réciproque de 18) n'est pas vraie dans l'espace (Si).

Mais si l'on se place dans le cas d'un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant la condition α), les propositions 14), 17) et 18) entraînent immédiatement la suivante :

* 19) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* α), *il y a identité entre les ensembles compacts en soi, les ensembles possédant la propriété de Borel et les ensembles compacts en soi au sens large.*

§ XI. **Sur la propriété cantorienne restreinte au cas d'une famille dénombrable d'ensembles.** — Démontrons les deux théorèmes suivants :

* 20) *Soit* E *un ensemble compact* (*en soi*) *au sens large, et soit* $\mathcal{F}$ *une famille monotone et dénombrable de sous-ensembles non vides de* E. *Alors il existe au moins un point de* E *commun à tous les ensembles de* $\mathcal{F}$, *ou un point* (*de* E) *commun aux dérivés de tous les ensembles de* $\mathcal{F}$.

En effet soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles de $\mathcal{F}$, les n étant tous les entiers naturels. Posons

$$I_n = E_1 E_2 \cdots E_n.$$

Comme $\mathcal{F}$ est monotone, l'un au moins des n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ est contenu dans les $(n-1)$ autres, et par conséquent on a toujours $I_n \neq 0$. Prenons un point a_n bien déterminé dans chaque I_n. L'un des deux cas suivants est sûrement réalisé :

1^er^ *cas* : Un point x figure une infinité de fois dans la suite des a_n.

Alors x est commun à tous les E_n et appartient à E.

2^e^ *cas* : La suite des a_n contient un ensemble infini dénombrable e de points distincts.

Alors, comme $e \subset E$, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation maximée de e. Si donc I_a est un ensemble auquel a est intérieur, I_a contient une infinité de points a_n distincts. Par conséquent I_a contient une infinité de points a_n distincts pour lesquels $n \geqslant$ un entier naturel q donné ; et ces points appartiennent à E_q. Donc $a \in E'_q$, ce quel que soit l'entier naturel q.

C. Q. F. D.

$I_x \subset K_n$, et par conséquent x est intérieur à K_n. Donc la famille dénombrable des ensembles $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ couvre E.

Ceci étant, supposons que l'ensemble E possède la propriété de BOREL. Alors la famille des K_n devrait contenir une sous-famille finie $K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, \dots, K_{\alpha_r}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r)$ couvrant E. Or le point a_{α_r} de E ne peut évidemment appartenir à aucun des ensembles $K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}, \dots, K_{\alpha_r}$. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Les deux théorèmes précédents 17) et 18) fournissent le premier une condition suffisante et le second une condition nécessaire pour qu'un ensemble possède la propriété de BOREL. Nous allons démontrer, avec M. FRÉCHET, que, *dans l'espace* ($\mathfrak{V}$) *le plus général, aucune de ces conditions n'est à la fois nécessaire et suffisante.*

Pour cela reprenons l'espace (Si) défini au § IV [subdivision *d*)] auquel nous renvoyons pour les notations adoptées.

Je dis que l'ensemble S des points de l'espace (Si) possède la propriété de BOREL. En effet soit $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ une famille dénombrable d'ensembles couvrant S. Puisque S n'est pas dénombrable, l'un au moins des ensembles I_n, soit I_{n_0}, contient à son intérieur une infinité non-dénombrable de points de S. Si alors α est un point arbitraire de S, comme l'ensemble des éléments de S qui précèdent un élément arbitrairement choisi de S est au plus dénombrable, il existe un élément β de S tel que β soit intérieur à I_{n_0} et ne précède ni α ni ω. Alors

$$\alpha \in (\beta) + S_\beta = V_\beta \subset I_{n_0}.$$

Il en résulte que

$$I_{n_0} = S = \text{espace entier}.$$

Comme chaque point de l'espace est intérieur à l'espace, l'ensemble I_{n_0} tout seul couvre S. Donc S possède la propriété de BOREL.

Ceci posé, nous avons établi au § IV (subdivision *e*)) que, dans l'espace (Si), le sous-ensemble dénombrable S_ω de S n'avait pas de point d'accumulation hyper-maximée. Donc S n'est pas compact en soi ni même compact. Par conséquent la réciproque de 17) n'est pas vraie dans l'espace (Si).

D'autre part considérons, dans l'espace (Si), l'ensemble

$$E = S_\omega + (\omega),$$

et soit $\mathcal{F}$ la famille dénombrable des voisinages des différents points de E. $\mathcal{F}$ couvre E, et on vérifie sans peine qu'une sous-famille finie de $\mathcal{F}$ ne peut couvrir E. Donc E ne possède pas la propriété de BOREL.

Par contre si e est un sous-ensemble dénombrable de E, comme

$$V_\omega = (\omega) + S_\omega = E,$$

point a_q bien déterminé satisfaisant aux conditions énoncées dans Q). Alors si I_q et I_r sont deux ensembles de $\mathcal{G}$ tels que $r < q$, il en résulte que a_r est intérieur à I_r mais que a_q n'est pas intérieur à I_r. Donc les points a_q sont tous différents. Soit alors e l'ensemble de tous les points a_q correspondant à tous les ensembles I_q de $\mathcal{G}$. On a

$$\text{puis. } e = \text{puis. } \mathcal{G} = \aleph_0$$

et

$$e \subset E.$$

Ceci posé, supposons l'ensemble E compact en sci. Alors il doit exister un point x de E tel que x soit point d'accumulation hyper-maximée de e. Puisque $\mathcal{G}$ couvre E, x est intérieur à un ensemble I_r de $\mathcal{G}$. On devrait donc avoir

(1) $$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_r) = \text{puis. } e = \aleph_0.$$

Or on a

$$(e \cdot \text{intérieur de } I_r) \subset (\text{ensemble des } a_q \text{ pour lesquels } q \leqslant r),$$

ce qui implique que le produit $e \cdot$ intérieur de I_r est fini contrairement à la relation (1). Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

18) *Tout ensemble possédant la propriété de Borel est compact en soi au sens large.*

En effet, soit E un ensemble qui n'est pas compact en soi au sens large. Alors il existe un sous-ensemble dénombrable e de E tel qu'un point de E ne soit jamais point d'accumulation maximée de e. Désignons les points de e par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, les n étant tous les entiers naturels et les a_n tous distincts. Alors à chaque point x de E nous pouvons supposer que l'on fasse correspondre un ensemble I_x bien déterminé auquel x soit intérieur, tel que

$$\text{puis. } (e \cdot I_x) \neq \text{puis. } e$$

c'est-à-dire tel que I_x ne contienne qu'un nombre fini ou nul de points a_n. Posons alors

K_n = somme de tous les ensembles I_x tels que I_x ne contienne aucun des points $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\ldots$

Si alors x est un point arbitraire de E, il existe un entier n tel que I_x ne contienne aucun des points $a_n, a_{n+1}, \ldots$; dans ce cas

la condition α), il y avait identité entre les points d'accumulation maximée et hyper-maximée. Il en résulte que

* 14) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *il y a identité entre les ensembles compacts* (*en soi*) *et les ensembles compacts* (*en soi*) *au sens large.*

Raisonnant exactement comme dans la démonstration de 4), nous obtenons les propositions :

15) *Tout ensemble compact et fermé est compact en soi.*

16) *Tout ensemble compact au sens large et fermé est compact en soi au sens large.*

Par contre, nous avons obtenu au § IV (subdivision *f*)) un exemple d'espace ($\mathfrak{V}$) — *qui est même un espace accessible* — *où un ensemble non fermé peut être parfaitement compact en soi et par conséquent aussi compact en soi et compact en soi au sens large.*

Nous avons enfin les conséquences presque immédiates suivantes de nos définitions : Toute partie d'un ensemble compact est compacte. Toute partie d'un ensemble compact au sens large est compacte au sens large.

§ X. **Deux théorèmes** (1) **concernant la propriété de Borel.**

17) *Tout ensemble compact en soi possède la propriété de Borel.*

Nous allons donner de ce théorème une démonstration analogue à celle de 7)″ mais plus simple. Soit E un ensemble ne possédant pas la propriété de Borel. Alors il existe une famille $\mathfrak{F}$ dénombrable d'ensembles I_1, I_2,...... I_n,....... (les n étant tous les entiers naturels) couvrant E mais ne contenant aucune sous-famille finie couvrant E. Appelons $\mathfrak{G}$ la famille des ensembles I_q de $\mathfrak{F}$ jouissant de la propriété suivante :

Q) Il existe un point a_q de E qui est intérieur à I_q, mais qui n'est intérieur à aucun des ensembles I_n pour lesquels $n < q$.

Si alors a est un point arbitraire de E, a est intérieur à un I_n, et celui des ensembles I_n auxquels a est intérieur pour lequel n est minimum, appartient à $\mathfrak{G}$. Donc la famille $\mathfrak{G}$ couvre E. Puisque $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ne contient aucune sous-famille finie couvrant E ; donc

$$\text{puis. } \mathfrak{G} = \aleph_0.$$

Ceci étant, faisons correspondre à chaque ensemble I_q de $\mathfrak{G}$ un

(1) Ces deux théorèmes 17) et 18) sont dus, dans un espace ($\mathfrak{V}$), à M. Fréchet, *Amer. journ. of math.*, vol. L, janvier 1928, p. 49-51.

Un ensemble E sera dit *compact* (*en soi*) [1] si, pour tout sous-ensemble dénombrable [2] e de E, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.

Un ensemble E sera dit *compact* (*en soi*) *au sens large* si, pour tout sous-ensemble dénombrable e de E, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation maximée de e.

Nous considérons tout ensemble fini comme étant compact (en soi) et compact (en soi) au sens large.

§ IX. **Remarques diverses sur les définitions précédentes.** — On a la proposition évidente suivante : Tout ensemble parfaitement compact (en soi) est compact (en soi). Nous verrons au § V du Chapitre VIII un exemple qui nous montrera que la réciproque de cette proposition n'a pas toujours lieu même dans un espace accessible.

Tenant compte de 1) on a la proposition : Tout ensemble compact (en soi) est compact (en soi) au sens large. Par contre les raisonnements faits au § IV, subdivision e), montrent que l'ensemble S de tous les points de l'espace (Si) — *qui est un espace* ($\mathfrak{V}$) — *est compact en soi au sens large sans être compact en soi ni même compact.*

Nous avons vu [théorème 3)] que, dans un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant

---

nous fourniront, dans des cas étendus, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble jouisse de la propriété de BOREL. C'est d'ailleurs la non-équivalence des propriétés de BOREL et de BOREL-LEBESGUE qui a été l'origine de l'introduction des ensembles parfaitement compacts (en soi) à côté des ensembles compacts (en soi).

(1) Il serait facile de vérifier que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), les ensembles que nous appelons *compacts* (*en soi*) coïncident avec les ensembles que M. FRÉCHET (*E. A.*, p. 195) a appelés *compacts* (*en soi*) *au sens très strict*, et que les ensembles que nous appelons *compacts* (*en soi*) *au sens large* coïncident avec les ensembles que M. FRÉCHET a appelés *compacts* (*en soi*). Nous avons cru devoir modifier légèrement la terminologie de M. FRÉCHET, ceci afin d'harmoniser les définitions admises dans le cas des ensembles compacts avec celles que nous avons adoptées dans le cas des ensembles parfaitement compacts. D'ailleurs, comme nous le verrons, dans le cas infiniment général des espaces ($\mathfrak{V}$) vérifiant la condition 2), il n'y a plus de différence à faire entre les ensembles « compacts (en soi) » à notre sens et les ensembles « compacts (en soi) au sens large » à notre sens, et par conséquent il n'y a plus de différence à faire entre notre terminologie et celle de M. FRÉCHET.

(2) Comme nous l'avons dit plus haut, nous appelons *dénombrable* un ensemble ayant exactement même puissance que l'ensemble de tous les entiers naturels. Un ensemble dénombrable est donc toujours infini.

généralisée. Alors il devrait exister un point x de G commun à tous les $\overline{G_I}$. Or on a

$$G_I \subset C(\text{intérieur de } I) = \overline{C(I)}$$

d'où, en tenant compte des conditions 1° de F. Riesz et α),

$$\overline{G_I} \subset \overline{\overline{C(I)}} = \overline{C(I)} = C(\text{intérieur de } I).$$

x ne serait donc intérieur à aucun des ensembles I de $\mathfrak{F}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que $\mathfrak{F}$ couvre G. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

Les théorèmes 3), 7), 11) et 12) entraînent l'énoncé suivant qui met en évidence les simplifications dues à l'introduction de la condition α) :

* 13) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *il y a identité entre un ensemble parfaitement compact en soi, un ensemble parfaitement compact en soi au sens large, un ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue et un ensemble possédant la propriété cantorienne généralisée.*

§ VIII. **Les ensembles compacts (en soi) et la propriété de Borel.** — Nous dirons qu'un ensemble E possède la *propriété de Borel* si chaque famille $\mathfrak{F}$ dénombrable d'ensembles couvrant E contient une sous-famille finie couvrant E.

On sait depuis longtemps que dans les espaces ($\mathfrak{V}$) très généraux dont nous nous occupons ici, et même dans un espace accessible, les propriétés de Borel et de Borel-Lebesgue ne sont pas équivalentes [1]. Nous allons développer une théorie analogue à celle des ensembles parfaitement compacts (en soi) où le rôle de la propriété de Borel-Lebesgue sera joué par la propriété de Borel. Pour cela nous adopterons, dans un espace ($\mathfrak{V}$), les définitions suivantes d'un ensemble compact (en soi) [2] et d'un ensemble compact (en soi) au sens large :

---

[1] Le premier exemple à l'appui de cette assertion est dû, croyons-nous, à M. F. Riesz (*E. A.*, p. 191). Nous obtiendrons au § V du Chapitre VIII, un exemple d'espace accessible possédant la propriété de Borel, mais ne possédant pas la propriété de Borel-Lebesgue.

[2] De même que les ensembles parfaitement compacts en soi nous ont fourni une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble jouisse de la propriété de Borel-Lebesgue, de même les ensembles compacts en soi

Nous en concluons qu'il existe toujours un point de S commun à tous les E'. Donc S possède la propriété cantorienne généralisée. Et pourtant on a vu (§ IV, *e*) que S n'était pas parfaitement compact en soi ni même parfaitement compact.

Par contre nous allons démontrer le théorème suivant :

* 12) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* α), *tout ensemble possédant la propriété cantorienne généralisée est parfaitement compact en soi.*

En effet soit, dans un tel espace, un ensemble G qui ne soit pas parfaitement compact en soi. Alors, en vertu du théorème de CHITTENDEN, G ne possède pas la propriété de BOREL-LEBESGUE. Raisonnant comme au début de la démonstration de 7)'', nous en déduisons qu'il existe au moins une famille d'ensembles jouissant de la propriété suivante :

P) Cette famille couvre G, mais elle ne contient aucune sous-famille finie couvrant G.

Parmi les familles d'ensembles jouissant de la propriété P) il en existe une $\mathcal{F}$ dont la puissance est minima. $\mathcal{F}$ est évidemment infinie, et nous supposerons $\mathcal{F}$ normalement bien ordonnée, ce qui nous est loisible. Si I est un ensemble quelconque de $\mathcal{F}$ nous posons :

$\mathcal{F}_I$ = famille des ensembles de $\mathcal{F}$ qui précèdent I.

G_I = ensemble des points de G qui ne sont intérieurs à aucun des ensembles de la famille $\mathcal{F}_I + (I)$.

Démontrons que les G_I sont tous non vides. En effet si G_I était vide, la famille $\mathcal{F}_I + (I)$ couvrirait G ; et comme cette famille est contenue dans $\mathcal{F}$, elle posséderait comme $\mathcal{F}$ la propriété P). On devrait donc avoir

$$\text{puis. } (\mathcal{F}_I + (I)) = \text{puis. } \mathcal{F}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est infinie et que l'on ne change pas la puissance d'un ensemble infini en lui enlevant un élément, on devrait avoir

$$\text{puis. } \mathcal{F}_I = \text{puis. } \mathcal{F}$$

contrairement à la définition d'un ensemble normalement bien ordonné. Les G_I sont donc tous non vides. D'autre part, il est évident que la famille des G_I correspondant à tous les ensembles I de $\mathcal{F}$ est une famille monotone de sous-ensembles de G.

Ceci étant, supposons que G possède la propriété cantorienne

Alors $a \in E_0'$. Soit alors E un ensemble quelconque de $\mathfrak{F}$. Ou bien $E \subset E_0$, et dans cette hypothèse a appartient à $\overline{E}$ sans appartenir à E ; donc $a \in E'$. Ou bien $E_0 \subset E$, et, dans cette hypothèse, en vertu de la condition 1° de F. Riesz, $a \in E'_0 \subset E'$. Nous en concluons que, dans le 2e *cas*, a est commun aux dérivés de tous les ensembles de $\mathfrak{F}$.

Donc p_1) entraîne p_2). C. Q. F. D.

Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

11) *Tout ensemble parfaitement compact en soi possède la propriété cantorienne généralisée.*

En effet, soit G un ensemble parfaitement compact en soi, et soit $\mathfrak{F}$ une famille monotone de sous-ensembles de G dont chacun soit non vide. Si $\mathfrak{F}_1$ est une sous-famille finie de $\mathfrak{F}$, on vérifie sans peine qu'il existe un ensemble E_1 de $\mathfrak{F}_1$ qui est contenu dans tous les autres ensembles de $\mathfrak{F}_1$. Comme $E_1 \neq 0$, il existe au moins un point commun à tous les ensembles de $\mathfrak{F}_1$, et ce point appartient évidemment à G. Nous en concluons, en appliquant le théorème 8), qu'il existe au moins un point de G commun aux fermetures de tous les ensembles de $\mathfrak{F}$.

C. Q. F. D. [1]

Nous allons étudier la vérité de la réciproque de 11). Donnons tout d'abord * *un exemple d'espace* ($\mathfrak{T}$) *où un ensemble peut jouir de la propriété cantorienne généralisée sans être parfaitement compact en soi.*

Cet exemple est fourni par l'espace (Si) de M. Sierpinski. Reprenons en effet les notations employées au § IV [subdivisions *d*) et *e*)]. Alors S désignera l'ensemble des points de l'espace (Si). Soit $\mathfrak{F}$ une famille monotone de sous-ensembles E de S dont chacun soit non vide. Il n'y a que deux cas possibles :

1er *cas* : Il existe un ensemble E_0 de $\mathfrak{F}$ tel que $E_0 \subset S_\omega$.

Alors, en vertu de la monotonie, tout ensemble E de $\mathfrak{F}$ vérifie $ES_\omega \neq 0$ d'où $S - S_\omega \subset E'$.

2e *cas* : Tout ensemble E de $\mathfrak{F}$ vérifie $E(S - S_\omega) \neq 0$.

Alors $$S_\omega \subset E'.$$

---

[1] M. Fréchet a démontré (*Ann. Ec. norm. sup.*, t. XXXVIII, 1921, p. 346-347) que, dans l'espace ($\mathfrak{T}$) le plus général, tout ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue jouit de la propriété que nous avons appelée p_2), c'est-à-dire jouit de la propriété cantorienne généralisée. C'est là au fond le résultat que nous avons établi dans la démonstration de 11).

10) *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'ensembles fermés dont l'un au moins est parfaitement compact. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un point commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, est que cette propriété ait lieu pour toute sous-famille finie de $\mathcal{F}$* (1).

§ VII. **La propriété cantorienne généralisée.** — Dans l'espace euclidien, on a la proposition suivante que CANTOR appelait le « Durchschnittssatz » :

Si $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$, est une suite infinie d'ensembles dont chacun est non vide, borné, fermé et contenant le suivant (les n étant tous les entiers naturels), il existe au moins un point commun à tous ces ensembles.

Nous allons donner une généralisation de cette proposition s'appliquant à un espace ($\mathcal{V}$). Pour cela nous adoptons la terminologie suivante :

Nous dirons qu'une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles est *monotone* si, étant donnés deux ensembles quelconques de $\mathcal{F}$, il y en a toujours un qui est un sous-ensemble de l'autre.

Nous dirons qu'un ensemble G possède la *propriété cantorienne généralisée* s'il possède la propriété suivante :

p_1) Pour toute famille monotone $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de G dont chacun est non vide, il existe au moins un point de G commun aux fermetures de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

Démontrons que * *cette propriété p_1) équivaut dans un espace ($\mathcal{V}$) à la suivante* :

p_2) Pour toute famille monotone $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de G dont chacun est non vide, il existe au moins un point de G commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$, ou un point de G commun aux dérivés de tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

En effet p_2) entraîne évidemment p_1). Réciproquement supposons p_1) vérifiée. Si alors $\mathcal{F}$ est une famille monotone de sous-ensembles de G dont chacun est non vide, il existe un point a de G commun aux fermetures de tous les ensembles de $\mathcal{F}$, et il n'y a que deux cas possibles :

1er *cas* : a est commun à tous les ensembles de $\mathcal{F}$.

2e *cas* : Il existe un ensemble E_0 de $\mathcal{F}$ ne contenant pas a.

(1) Dans le cas de l'espace euclidien, ce théorème avait été énoncé pour la première fois par M. F. RIESZ puis retrouvé et démontré pour la première fois par M. SIERPINSKI (*Bull. int. acad. sc. Cracovie*, série A, 1918, p. 49-51).

§ VI. **Sur diverses généralisations d'un théorème de M. F. Riesz.** — Démontrons la proposition suivante :

* 8) *Soit* G *un ensemble parfaitement compact en soi, et soit* $\mathfrak{F}$ *une famille d'ensembles* E. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un point de* G *commun aux fermetures* $\overline{E}$ *de tous les ensembles* E *de* $\mathfrak{F}$ *est que cette propriété ait lieu pour toute sous-famille finie de* $\mathfrak{F}$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour démontrer qu'elle est suffisante, supposons qu'il n'existe aucun point de G commun aux fermetures $\overline{E}$ de tous les ensembles E de $\mathfrak{F}$. Alors pour tout point a de G il existe un ensemble E de $\mathfrak{F}$ tel que

$$a \in C(\overline{E}) = \text{intérieur de } C(E).$$

Donc la famille de tous les ensembles C(E) couvre G. Donc, en vertu du théorème de Chittenden, cette famille contient une sous-famille finie $C(E_1)$, $C(E_2), \ldots, C(E_n)$, couvrant G (Les E_i étant des ensembles de $\mathfrak{F}$). Par conséquent

$$G \subset \sum_{i=1}^{i=n} [\text{intérieur de } C(E_i)] = \sum_{i=1}^{i=n} C(\overline{E}_i).$$

Donc il n'existe aucun point de G commun aux ensembles $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$. Par conséquent la condition est bien suffisante.

C. Q. F. D.

Si l'on suppose que G est la fermeture d'un ensemble de $\mathfrak{F}$, on déduit immédiatement de 8) le théorème suivant :

* 9) *Soit* $\mathfrak{F}$ *une famille d'ensembles dont l'un au moins a sa fermeture parfaitement compacte en soi. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un point commun aux fermetures de tous les ensembles de* $\mathfrak{F}$ *est que cette propriété ait lieu pour toute sous-famille finie de* $\mathfrak{F}$.

Comme tout ensemble parfaitement compact et fermé est parfaitement compact en soi et coïncide avec sa fermeture, le théorème 9) s'applique immédiatement à une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles dont l'un au moins est parfaitement compact et fermé.

Le théorème 9) admet le cas particulier suivant [1] :

---

(1) Déjà obtenu par M. Fréchet dans un espace ($\mathfrak{V}$), *Amer. journ. of math.*, janvier 1928, p. 53.

rieur appartient à la famille $\mathcal{G}$. Donc la famille $\mathcal{G}$ couvre E. Par conséquent $\mathcal{G}$ qui est une sous-famille de $\mathcal{F}$, possède comme $\mathcal{F}$ la propriété P). Il en résulte que

$$\text{puis. } \mathcal{G} = \text{puis. } \mathcal{F}.$$

Faisons correspondre à tout ensemble I de $\mathcal{G}$ un point a_{I} bien déterminé satisfaisant aux conditions énoncées dans Q). Alors si I et K sont deux ensembles distincts de la famille $\mathcal{G}$ tels que K précède I, il en résulte que a_{K} est intérieur à K mais que a_{I} n'est pas intérieur à K. Donc $a_{\mathrm{I}} \neq a_{\mathrm{K}}$. Soit alors e l'ensemble de tous les points a_{I} correspondant à tous les ensembles I de $\mathcal{G}$. On a

$$\text{puis. } e = \text{puis. } \mathcal{G} = \text{puis. } \mathcal{F};$$

e est infini comme $\mathcal{F}$, et $e \subset \mathrm{E}$.

Ceci posé, supposons l'ensemble E parfaitement compact en soi. Alors il existe un point x de E tel que x soit point d'accumulation hyper-maximée de e. Puisque $\mathcal{G}$ couvre E, x est intérieur à un ensemble K de $\mathcal{G}$. On a donc

$$(1) \qquad \text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) = \text{puis. } e = \text{puis. } \mathcal{F}.$$

Or on a, en vertu de la définition des a_{I},

$$(e \cdot \text{intérieur de K}) \subset (\text{ensemble des } a_{\mathrm{I}} \text{ pour lesquels I précède K}) + (a_{\mathrm{K}}).$$

Les deux termes de cette inclusion sont infinis en vertu de la relation (1) ; et comme on ne change pas la puissance d'un ensemble infini en lui enlevant un élément (théorème VI du § I), nous pouvons écrire

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) \leqslant \text{puis. } (\text{famille des ensembles I de } \mathcal{G} \text{ précédant K});$$

d'où

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) \leqslant \text{puis. } (\text{famille des ensembles I de } \mathcal{F} \text{ précédant K});$$

d'où, en tenant compte de ce que $\mathcal{F}$ a été supposée normalement bien ordonnée,

$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de K}) < \text{puis. } \mathcal{F}$$

contrairement à la relation (1). Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

LEBESGUE et qui ne soit pas parfaitement compact en soi. Alors il existe un sous-ensemble infini e de E tel qu'un point de E ne soit jamais point d'accumulation hyper-maximée de e. Donc, pour tout point a de E, il existe un ensemble I_a auquel a est intérieur tel que

$$\text{puis.}\ (e \cdot \text{intérieur de } I_a) \neq \text{puis.}\ e.$$

La famille des ensembles I_a correspondant à tous les points a de E, couvre E. Donc cette famille contient une sous-famille finie $I_{a_1}, I_{a_2}, \ldots I_{a_n}$, ($n$ = un entier naturel) couvrant E. On a donc

$$\sum_{k=1}^{k=n} (e \cdot \text{intérieur de } I_{a_k}) = e.$$

Alors, en vertu du théorème VI du § I de ce Chapitre (théorème qui se généralise immédiatement au cas d'un nombre fini d'ensembles), l'un au moins des ensembles

$$e \cdot \text{intérieur de } I_{a_k}$$

devrait avoir même puissance que e. Nous aboutissons donc à une contradiction.

C. Q. F. D.

7)″ *Tout ensemble parfaitement compact en soi possède la propriété de Borel-Lebesgue.*

En effet, soit E un ensemble ne possédant pas la propriété de BOREL-LEBESGUE. Alors il existe au moins une famille d'ensembles jouissant de la propriété suivante :

P) Cette famille couvre E mais elle ne contient aucune sous-famille finie couvrant E.

Parmi les familles d'ensembles jouissant de la propriété P) il en existe une $\mathcal{F}$ dont la puissance est minima (théorème V du § I de ce Chapitre). $\mathcal{F}$ est évidemment infinie, et (théorème VIII du § I) nous pouvons supposer $\mathcal{F}$ *normalement bien ordonnée.* Appelons $\mathcal{G}$ la famille des ensembles I de $\mathcal{F}$ jouissant de la propriété suivante :

Q) Il existe un point a_I de E qui est intérieur à I, mais qui n'est intérieur à aucun des ensembles de $\mathcal{F}$ précédant I.

Si alors a est un point arbitraire de E, a est intérieur à un ensemble de $\mathcal{F}$, et le premier ensemble I de $\mathcal{F}$ auquel a est inté-

Tenant compte du théorème 2) et de la condition 1° de F. RIESZ, on peut écrire :

$$a \in e' \subset E' \subset E$$

donc $$a \in E.$$

C. Q. F. D.

g) Remarquons enfin que nos définitions entraînent immédiatement les propositions suivantes :

5) *Toute partie d'un ensemble parfaitement compact est parfaitement compacte.*

6) *Toute partie d'un ensemble parfaitement compact au sens large est parfaitement compacte au sens large.*

§ V. **Le théorème de Chittenden.** — Nous adoptons les définitions suivantes :

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles *couvre* l'ensemble E si chaque point de E est intérieur à l'un au moins des ensembles de $\mathcal{F}$.

Un ensemble E possède la *propriété de Borel-Lebesgue* si, quelle que soit la famille $\mathcal{F}$ d'ensembles couvrant E, il existe une famille [1] finie $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ et couvrant E.

Démontrons alors le théorème suivant :

7) *Théorème de Chittenden* [2]. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble possède la propriété de Borel-Lebesgue est que cet ensemble soit parfaitement compact en soi.*

Le théorème de CHITTENDEN résulte des deux propositions suivantes que nous allons établir :

7)' *Tout ensemble possédant la propriété de Borel-Lebesgue est parfaitement compact en soi.*

En effet, soit E un ensemble possédant la propriété de BOREL-

---

[1] La relation $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ signifie que tout ensemble de la famille $\mathcal{F}_1$ est un ensemble de la famille $\mathcal{F}$; on peut l'exprimer en disant que $\mathcal{F}_1$ est une *sous-famille* de $\mathcal{F}$.

[2] Ce théorème est dû à M. CHITTENDEN dans l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général (« Nuclear and hyper-nuclear points.... » *Bull. Amer. math. Soc.*, vol. XXX, 1924, p. 517), et il constitue une justification de la définition d'un ensemble parfaitement compact en soi, admise au § III ; on sait en effet que, dans l'espace euclidien, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble possède la propriété de BOREL-LEBESGUE est que cet ensemble soit à la fois borné et fermé. Plusieurs cas particuliers du théorème de CHITTENDEN avaient été obtenus auparavant par divers auteurs qui s'étaient placés dans des espaces moins généraux.

f) Il serait facile de vérifier que, dans l'espace euclidien, les ensembles parfaitement compacts coïncident avec les ensembles bornés, et que les ensembles parfaitement compacts en soi coïncident avec les ensembles à la fois bornés et fermés. La propriété qui nous a servi à définir au § III les ensembles parfaitement compacts (en soi) est simplement une forme plus précise que la forme habituelle du « principe de WEIERSTRASS-BOLZANO ». Remarquons toutefois [1] que dans un espace ($\mathfrak{V}$), et même *dans un espace accessible, un ensemble parfaitement compact en soi peut ne pas être fermé.* Ceci résultera de l'exemple suivant :

Nous avons déjà utilisé au Chapitre VI un espace dont les points étaient les éléments d'un ensemble infini dénombrable P, et où on posait pour tout ensemble $E \subset P$,

$$E' = 0 \qquad \text{si E est fini,}$$

et

$$E' = P \qquad \text{si E est infini.}$$

Nous avions vu que cet espace était un espace accessible.

Soit alors E un sous-ensemble infini de P tel que

$$C(E) = P - E \neq 0.$$

Alors $E' = P$ de sorte que E n'est pas fermé.

Ceci posé, soit e un sous-ensemble infini de E, soit a un point de E, et soit I_a un ensemble auquel a soit intérieur. Alors a n'appartient pas à $[C(I_a)]'$, et par conséquent $[C(I_a)]'$ étant distinct de l'espace entier, est nécessairement vide ; donc $C(I_a)$ est fini ou vide, et

$$I_a = \text{intérieur de } I_a.$$

Il en résulte que l'ensemble

$$e(\text{intérieur de } I_a) = eI_a = e - C(I_a)$$

a même puissance que e. Donc a est point d'accumulation hyper-maximée de e ; par conséquent E est parfaitement compact en soi quoique non fermé.

Par contre, on a dans un espace ($\mathfrak{V}$) la proposition suivante :

4) *Tout ensemble* E *parfaitement compact et fermé est parfaitement compact en soi.*

En effet, soit e un sous-ensemble infini de E ; alors il existe un point a qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.

---

(1) Avec M. FRÉCHET *E. A.*, p. 230.

Si S_α est infini dénombrable, nous dirons que α est un nombre ordinal de *classe* II. Les nombres de classe II sont dits *transfinis*. Le premier nombre ordinal de classe II se représente par ω, le suivant par $\omega + 1$, etc. On peut écrire :

$$S_\omega = \text{classe I}$$
$$S - S_\omega = \text{classe II}.$$

Ceci posé, nous appellerons espace (Si) un espace ($\mathcal{V}$) dont les points sont les éléments de S et où on attribue à chaque point α un seul voisinage

$$V_\alpha = (\alpha) + (S - S_\omega) \qquad \text{si } \alpha \in S_\omega$$

et

$$V_\alpha = (\alpha) + S_\alpha \qquad \text{si } \alpha \in S - S_\omega.$$

e) Application de l'espace (Si). — On vérifie sans peine que l'on a dans l'espace (Si)

$$(\text{intérieur de } V_\alpha) = (\alpha) \qquad \text{si } \alpha \in S_\omega$$
$$(\text{intérieur de } V_\alpha) = (\alpha) + (S_\alpha - S_\omega) \qquad \text{si } \alpha \in S - S_\omega.$$

On en déduit

$$S_\omega \cdot \text{intérieur de } V_\alpha = (\alpha) \qquad \text{si } \alpha \in S_\omega$$
$$S_\omega \cdot \text{intérieur de } V_\alpha = 0 \qquad \text{si } \alpha \in S - S_\omega.$$

Nous en concluons que le sous-ensemble infini S_ω de S n'a pas de point d'accumulation hyper-maximée. Par conséquent S n'est pas parfaitement compact en soi, ni même parfaitement compact.

Ceci posé, soit e un sous-ensemble infini quelconque de S ; on a

$$e = eS_\omega + e(S - S_\omega)$$

et l'un des deux cas suivants est sûrement réalisé (théorème VI du § I) :

1er *cas* : puis. e = puis. (eS_ω).

Alors

$$eV_\omega = e[(\omega) + S_\omega]$$

d'où

$$\text{puis. } (eV_\omega) = \text{puis. } e$$

donc ω est point d'accumulation maximée de e.

2e *cas* ; puis. e = puis. $[e(S - S_\omega)]$.

Alors si $\alpha \in S_\omega$, on a

$$eV_\alpha = e[(\alpha) + (S - S_\omega)]$$

d'où

$$\text{puis. } (eV_\alpha) = \text{puis. } e$$

donc α est point d'accumulation maximée de e.

Il résulte de l'examen des deux cas précédents que pour tout sous-ensemble infini e de S, il existe un point de S qui est point d'accumulation maximée de e ; par conséquent S est parfaitement compact en soi au sens large. C'est le résultat que nous voulions établir.

En vertu de α), K_a est un ensemble ouvert ; on peut donc écrire

$$a \in K_a = \text{intérieur de } K_a.$$

On a donc, en vertu de la définition d'un point d'accumulation maximée,

$$\text{puis. } (e \cdot K_a) = \text{puis. } e$$

d'où
$$\text{puis. } (e \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis. } e.$$

Donc a est point d'accumulation hyper-maximée de e

C. Q. F. D.

Par contre, nous allons construire *un exemple d'espace* ($\mathfrak{V}$) *où ne subsistent aucune des identités énoncées dans le théorème* 3) *précédent.* Cet espace, que nous appellerons l'espace (Si) et qui nous sera souvent utile, a été imaginé par M. Sierpinski (1).

d) *L'espace* (Si). — Pour définir cet espace nous aurons besoin des nombres ordinaux de classes I et II. Il nous sera commode d'introduire ces nombres de la façon suivante :

Soit S un ensemble de puissance $\aleph_1$ et normalement bien ordonné (un tel ensemble existe en vertu du théorème VIII de l'Introduction à ce Chapitre). Nous conviendrons d'appeler *nombres ordinaux* (de classes I et II) les éléments de S.

La suite des nombres ordinaux sera ainsi pour nous purement et simplement une suite de symboles donnés une fois pour toutes et ordonnés de la manière que nous venons de définir.

Si α est un élément de S, nous posons

$$S_\alpha = \text{ensemble des éléments de S qui précèdent } \alpha.$$

En vertu de la définition d'un ensemble normalement bien ordonné, on a toujours

$$\text{puis. } S_\alpha < \text{puis. } S = \aleph_1.$$

Par conséquent S_α, s'il n'est pas vide, est fini ou dénombrable.

Nous désignerons le premier élément de S par 0, le premier élément de S qui suit 0 par 1, le premier élément de S qui suit 1 par 2, et ainsi de suite. Alors les nombres ordinaux α pour lesquels S_α est vide ou fini seront représentés par les mêmes symboles que les entiers naturels (y compris 0) :

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

Ces nombres ordinaux sont dits de *classe* I ; ils sont aussi dits *finis.*

---

(1) Voir M. Fréchet « Démonstration de quelques propriétés des ensembles abstraits », *Amer. Journ. of math.*, vol. L, 1928, p. 51.

tout sous-ensemble infini e de E, il existe un point a (de E) qui est point d'accumulation hyper-maximée de e.

Nous considérons tout ensemble fini comme étant parfaitement compact et parfaitement compact en soi.

Il nous sera commode d'introduire aussi des ensembles que nous nommerons *parfaitement compacts* (*en soi*) *au sens large* ; leur définition se déduit de la définition des ensembles parfaitement compacts (en soi) en y remplaçant les points d'accumulation hyper-maximée par les points d'accumulation maximée.

§ IV. **Remarques sur les définitions précédentes.** — a) Nous savons que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a soit intérieur à un ensemble E, est qu'il existe un voisinage de a appartenant entièrement à E (voir Chapitre I). On déduit facilement de là que l'on obtient des définitions équivalentes à nos définitions des points d'accumulation maximée et hyper-maximée, en y remplaçant les mots « ensemble auquel a est intérieur » par les mots « voisinage de a » [1].

b) On constate sans peine que :

1) *Tout point d'accumulation hyper-maximée d'un ensemble e est un point d'accumulation maximée de e, et par conséquent tout ensemble parfaitement compact* (*en soi*) *est parfaitement compact* (*en soi*) *au sens large.*

2) *Si l'ensemble e contient plus d'un point, les points d'accumulation maximée et hyper-maximée de e sont des points d'accumulation de e.*

c) La réalisation de la condition α) permet de réduire le nombre des définitions admises au § III ; nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

3) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *il y a identité entre les points d'accumulation maximée et hyper-maximée, et par conséquent il y a identité entre un ensemble parfaitement compact* (*en soi*) *et un ensemble parfaitement compact* (*en soi*) *au sens large.*

En effet, soit a un point d'accumulation maximée d'un ensemble e ; soit I_a un ensemble auquel a est intérieur, et soit

$$K_a = \text{intérieur de } I_a.$$

[1] On déduit de là que notre définition d'un ensemble *parfaitement compact* (*en soi*) équivaut, dans un espace ($\mathfrak{V}$), à la définition d'un ensemble *parfaitement compact* (*en soi*) admise dans le même cas par M. Fréchet (*E. A.*, p. 195).

continue sur E soit bornée sur E et atteigne ses bornes supérieure et inférieure sur E.

Les ensembles généralisant les ensembles euclidiens bornés seront désignés dans la suite par l'appellation générique de *compacts*, et les ensembles généralisant les ensembles euclidiens à la fois bornés et fermés seront désignés par l'appellation générique de *compacts en soi*. Ces derniers ne seront d'ailleurs pas toujours fermés, du moins dans les espaces abstraits les plus généraux.

De plus il y aura lieu, suivant les diverses propriétés des ensembles euclidiens bornés (ou bornés et fermés) que nous chercherons à généraliser au cas des espaces ($\mathcal{V}$), de distinguer diverses espèces d'ensembles compacts (en soi), à savoir les ensembles proprement appelés « compacts (en soi) », les ensembles « compacts (en soi) au sens large », les ensembles « parfaitement compacts (en soi) », etc. [1]. Nous verrons d'ailleurs que le nombre de ces nuances variées qui différencient la notion de compacité se réduit considérablement quand se trouve réalisée notre condition α) (tout ensemble de fermeture est fermé).

§ III. **Les ensembles parfaitement compacts (en soi).** — Nous adoptons dans un espace ($\mathcal{V}$) la terminologie suivante :

Un point a sera dit *point d'accumulation maximée* d'un ensemble e si, pour tout ensemble I_a auquel a est intérieur, on a

$$\text{puis.}\ (e \cdot I_a) = \text{puis.}\ e,$$

$e.I_a$ désignant, suivant nos notations habituelles, l'ensemble commun à e et à I_a.

Un point a sera dit *point d'accumulation hyper-maximée* d'un ensemble e si, pour tout ensemble I_a auquel a est intérieur, on a

$$\text{puis.}\ (e \cdot \text{intérieur de } I_a) = \text{puis.}\ e.$$

Un ensemble E sera dit *parfaitement compact* (*en soi*) si, pour

---

[1] On trouverait dans l'ouvrage de M. FRÉCHET (*E. A.*, p. 191-193, et aussi p. 68-70) des indications historiques détaillées sur le développement de la théorie des ensembles compacts, développement auquel ont concouru de nombreux auteurs parmi lesquels nous citerons en premier lieu M. FRÉCHET et ensuite M. M. CHITTENDEN, R. L. MOORE, F. RIESZ, SIERPINSKI, KURATOWSKI, etc. Nous nous contentons de rappeler ici que la notion d'ensemble compact a été introduite pour la première fois par M. FRÉCHET (*Thèse*, Paris 1906, p. 6).

a de E tel que puis. E_a = puis. E. Soit alors a_0 le premier élément de E tel que

$$\text{puis. } E_{a_0} = \text{puis. } E.$$

Si b est un élément de E_{a_0}, b est un élément de E précédant a_0, de sorte que

$$\text{puis. } E_b < \text{puis. } E = \text{puis. } E_{a_0}.$$

Donc E_{a_0} est normalement bien ordonné ; de plus E_{a_0} a même puissance que G.

C. Q. F. D.

Considérons alors un ensemble G, et soit E un ensemble normalement bien ordonné et de même puissance que G. Il existe une transformation biunivoque transformant G en E. Si alors nous attribuons à deux éléments quelconques de G le même ordre relatif qu'à leurs transformés qui appartiennent à E, G sera normalement bien ordonné. Nous déduisons de là que le théorème de Zermelo entraîne le théorème suivant :

VIII. — *Tout ensemble peut, d'une possibilité idéale, être normalement bien ordonné.*

Ce théorème VIII entraîne évidemment le théorème de Zermelo, de sorte qu'il lui équivaut.

§ II. **La notion de compacité.** — Notre but va être maintenant de définir et d'étudier, dans les espaces abstraits les plus généraux, des ensembles analogues par leurs propriétés aux ensembles euclidiens bornés et surtout aux ensembles euclidiens à la fois bornés et fermés. Pour se rendre compte de l'intérêt d'une telle recherche, il suffit de se rappeler le rôle important joué dans l'Analyse classique par les ensembles bornés, et peut-être surtout par les ensembles à la fois bornés et fermés. Nous nous contentons de citer à l'appui de cette assertion, le principe de Weierstrass-Bolzano (1) ainsi que la proposition suivante :

Si l'on se limite aux ensembles de nombres réels, il y a identité (2) entre la classe des ensembles à la fois bornés et fermés et la classe des ensembles E tels que chaque fonction réelle

---

(1) Dans un espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions, tout ensemble infini et borné admet au moins un point d'accumulation.

(2) Nous indiquerons au Chapitre IX (§ VI) une généralisation de cette importante proposition.

place de c dans la suite des alephs. L'hypothèse suivant laquelle on aurait

$$c = \aleph_1$$

est souvent appelée « hypothèse du continu ».

Remarque I. — Nos définitions successives des $\aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\omega, \ldots$ supposent que l'on accorde le théorème V qui équivaut à l'axiome de Zermelo comme on l'a vu.

Remarque II. — Nous ne prétendons pas avoir passé en revue, dans ce qui précède, toutes les propriétés des puissances d'ensembles susceptibles d'être utilisées par nous ; nous les mentionnerons au fur et à mesure des besoins. Indiquons toutefois encore les propriétés suivantes qui sont d'un usage courant

Toute somme d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Toute somme de deux ensembles dénombrables est dénombrable.

Toute somme d'une infinité dénombrable d'ensembles chacun fini ou dénombrable est dénombrable (ou exceptionnellement finie).

Cette dernière proposition se démontre en utilisant l'axiome de Zermelo [1].

f) Les ensembles normalement bien ordonnés. — Soit E un ensemble ordonné, et soit a un élément de E ; nous poserons

E_a = ensemble des éléments de E qui précèdent a.

On a toujours $E_a \subset E$, d'où

$$\text{puis. } E_a \leqslant \text{puis. } E.$$

Ceci posé, nous dirons qu'un ensemble E est *normalement bien ordonné* (ou qu'un *bon ordre normal* a été attribué aux éléments de E) si les deux conditions suivantes sont remplies :

1° E est bien ordonné.

2° Pour tout élément a de E on a

$$\text{puis. } E_a < \text{puis. } E.$$

Nous allons démontrer que le théorème de Zermelo entraîne la proposition suivante : Pour tout ensemble G il existe un ensemble normalement bien ordonné et de même puissance que G.

En effet, en vertu du théorème de Zermelo, il existe un ensemble E bien ordonné et de même puissance que G. Si E est normalement bien ordonné, notre conclusion est établie.

Si E n'est pas normalement bien ordonné, il existe un élément

---

[1] M. Sierpinski, ouvrage cité, p. 123-124.

les entiers naturels. On désigne la puissance ou le nombre cardinal d'un ensemble dénombrable par le symbole $\aleph_0$ qui s'énonce « aleph-zéro ».

On peut démontrer (1) à l'aide de l'axiome de ZERMELO que :

VII. *Tout ensemble non vide qui n'est pas fini contient un sous-ensemble dénombrable.*

Soit alors E un ensemble non vide quelconque, et soit ξ le nombre cardinal de E. En vertu du théorème VII précédent, nous n'avons que deux cas possibles :

1er *cas.* E est fini.

Alors ξ est le nombre entier naturel des éléments de E. Dans ce cas il existe une correspondance biunivoque entre E et l'ensemble des ξ premiers entiers naturels, mais il n'en existe aucune entre l'ensemble de tous les entiers naturels et un sous-ensemble de E. On a donc $\xi < \aleph_0$.

2e *cas.* E contient un sous-ensemble dénombrable.

Alors on a $\aleph_0 \leqslant \xi$. Quand ce 2e *cas* est réalisé, l'ensemble E sera dit *infini*, et son nombre cardinal ξ sera dit *transfini.*

En vertu du théorème III il existe des ensembles de nombre cardinal $> \aleph_0$; de tels ensembles sont dits *non-dénombrables.*

Parmi les nombres cardinaux $> \aleph_0$, il en existe un qui est plus petit que tous les autres (ceci peut se déduire du théorème V) ; on le désigne par $\aleph_1$.

De même il existe des nombres cardinaux $> \aleph_1$ (en vertu du théorème III) ; et parmi ceux-ci il en existe un qui est le plus petit (théorème V), on le désigne par $\aleph_2$. On définit de même $\aleph_3, \aleph_4, \ldots, \aleph_n, \ldots$ pour tout entier naturel n.

Il existe un nombre cardinal $\eta > \aleph_n$ quel que soit l'entier naturel n (en vertu du théorème IV) ; et parmi les nombres cardinaux η satisfaisant à cette condition, il en existe un qui est le plus petit (théorème V) ; on le désigne par $\aleph_\omega$.

On pourrait continuer ce procédé de définition sans être jamais arrêté. Nous nous contenterons de ces notions extrêmement succinctes sur la suite des *alephs*.

On désigne par c le nombre cardinal ou puissance de l'ensemble de tous les « nombres réels » ; on dit que c est la *puissance du continu linéaire* ou plus simplement la *puissance du continu.* On peut démontrer que

$c =$ puissance de l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble dénombrable.

On a donc, en vertu du théorème III,

$$\aleph_0 < c.$$

Dans l'état actuel de la théorie des ensembles, on ignore quelle est la

(1) M. SIERPINSKI, ouvrage cité, p. 115-116.

Soit E un ensemble quelconque ; désignons en général par C_E la classe des ensembles e tels que

$$(1) \qquad \text{puis. } e = \text{puis. E.}$$

En particulier E est élément de C_E. On a vu que la relation (1) ci-dessus était transitive comme les égalités ordinaires, et on déduit de là sans peine les résultats suivants :

Deux classes du type précédent sont toujours soit identiques, soit sans ensemble-élément commun. Donc tout ensemble E appartient à une et une seule des classes précédentes à savoir à la classe C_E. Deux ensembles appartenant à une même classe ont même puissance, et deux ensembles appartenant à deux classes différentes n'ont pas même puissance.

Ceci posé, nous appelons *nombre cardinal* ou *puissance* de l'un quelconque des ensembles d'une classe C du type précédent, la propriété commune à tous les ensembles de C, propriété qui consiste à avoir même puissance que l'un des ensembles de C. Nous représenterons ce nombre cardinal par un symbole, ξ par exemple, le même pour tous les ensembles de C.

Alors à chacune des relations définies plus haut

$$(2) \qquad \text{puis. E} <, = \quad \text{ou} \quad > \text{puis. F}$$

nous convenons de pouvoir substituer celle des relations

$$(3) \qquad \xi <, = \quad \text{ou} \quad > \eta.$$

qui est de même forme, ξ et η étant les nombres cardinaux correspondant aux classes C_E et C_F. Et comme les relations du type (2) satisfont aux mêmes propriétés formelles que les égalités et inégalités ordinaires, il en sera de même pour les relations du type (3).

e) Notions succinctes sur la suite des nombres cardinaux. — Pour que deux ensembles finis E et F aient le même nombre d'éléments (au sens usuel du mot nombre) il faut et il suffit qu'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de E et les éléments de F, c'est-à-dire que E et F aient le même *nombre cardinal*. Ainsi, pour les ensembles finis, il y a identité, ou du moins équivalence, entre la notion de nombre au sens usuel et la notion de *nombre cardinal* ou *puissance*. Les nombres cardinaux des ensembles finis sont dits *finis*, ce sont les entiers naturels

$$1, 2, 3, 4, \cdots$$

On constate sans peine que si deux entiers naturels m et n vérifient l'inégalité $n < m$ au sens de l'arithmétique élémentaire, on a aussi $n < m$ au sens des inégalités entre nombres cardinaux.

Ceci posé, on dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il a même puissance que l'ensemble de tous les entiers naturels, autrement dit s'il existe une correspondance biunivoque entre les éléments de E et *tous*

IV. *Etant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles* E, *il existe un ensemble* H *ayant une puissance supérieure à toutes celles des ensembles* E *de* $\mathcal{F}$.

Ce théorème se déduit sans peine du précédent. Soit en effet S la somme de tous les ensembles E de $\mathcal{F}$; on a pour chaque E de $\mathcal{F}$:

$$E \subset S$$

d'où

$$\text{puis. } E \leqslant \text{puis. } S.$$

Soit H l'ensemble de tous les sous-ensembles de S ; on a, en vertu de III,

$$\text{puis. } S < \text{puis. } H$$

d'où

$$\text{puis. } E < \text{puis. } H.$$

C. Q. F. D.

On peut démontrer [1] qu'étant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles E chacun bien ordonné, il existe un ensemble E de $\mathcal{F}$ dont la puissance est inférieure ou égale à toutes celles des autres ensembles de $\mathcal{F}$. Si donc on admet l'axiome de Zermelo et par conséquent le théorème de Zermelo, on a la proposition suivante :

V. *Etant donnée une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles quelconques* E, *il existe un ensemble* E *de $\mathcal{F}$ dont la puissance est inférieure ou égale à toutes celles des autres ensembles de $\mathcal{F}$.*

Remarquons que ce théorème V entraîne que les puissances de deux ensembles sont toujours comparables (il suffit pour le voir de prendre le cas où $\mathcal{F}$ ne contient que deux ensembles). Le théorème V entraîne donc la trichotomie et par conséquent (en vertu du théorème d'Hartogs) l'axiome de Zermelo. Le théorème V équivaut donc à l'axiome de Zermelo.

Enfin, on peut établir [2] que l'axiome de Zermelo équivaut à la proposition suivante :

VI. *Si* E *et* F *sont deux ensembles dont la somme n'est pas finie* [3], *l'un au moins de ces deux ensembles a même puissance que* E + F.

d) Définition du nombre cardinal en lui-même. — Bien que nous ayons employé très fréquemment les mots de « nombre cardinal » ou de « puissance », nous avons omis jusqu'ici de donner une définition du nombre cardinal — ou puissance — en lui-même ; nous nous sommes contenté de définir des relations liant deux ensembles et exprimées par les formules :

$$\text{puis. } E < , = \quad \text{ou} \quad > \text{puis. } F.$$

Comme toutes les fois que nous nous sommes servi des mots « nombre cardinal » ou « puissance », il s'agissait d'exprimer une telle relation, il n'y a eu aucun illogisme dans cette façon de procéder. Nous présenterons de la manière suivante la définition du nombre cardinal lui-même :

---

[1] M. Sierpinski, ouvrage cité, p. 214.

[2] *Ibid.*, p. 233.

[3] Nous supposons acquise la notion d'ensemble *fini*.

c) Propriétés des nombres cardinaux ou puissances d'ensembles. — Il résulte de la discussion précédente qu'en admettant l'axiome de ZERMELO on a la proposition suivante :

II. *Etant donnés deux ensembles quelconques* E *et* F, *on a toujours une et une seule des trois relations*

$$\text{puis. } E = \text{puis. } F$$

ou

$$\text{puis. } E < \text{puis. } F$$

ou

$$\text{puis. } E > \text{puis. } F.$$

Pour exprimer que la puissance de E est inférieure ou égale à la puissance de F, c'est-à-dire pour signifier que l'on est, soit dans le 1er *cas*, soit dans le 2e *cas*, nous écrirons

$$\text{puis. } E \leqslant \text{puis. } F$$

ou

$$\text{puis. } F \geqslant \text{puis. } E.$$

Il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour que cette relation ait lieu est qu'il existe une correspondance biunivoque entre E et un sous-ensemble de F.

Comme la transformation *identique* (c'est-à-dire la transformation faisant correspondre à tout objet a cet objet a lui-même) est une transformation biunivoque, nous concluons de la proposition précédente que la relation

$$E \subset F$$

entraîne

$$\text{puis. } E \leqslant \text{puis. } F.$$

On démontrerait très facilement que les égalités et inégalités introduites plus haut entre puissances ou nombres cardinaux, vérifient les propriétés formelles suivantes des égalités et inégalités ordinaires :

Les relations	$\text{puis. } E = \text{puis. } F$
et	$\text{puis. } F = \text{puis. } G$
entraînent toujours	$\text{puis. } E = \text{puis. } G.$
Les relations	$\text{puis. } E \leqslant \text{puis. } F$
et	$\text{puis. } F < \text{puis. } G$
entraînent toujours	$\text{puis. } E < \text{puis. } G.$
Les relations	$\text{puis. } E < \text{puis. } F$
et	$\text{puis. } F \leqslant \text{puis. } G$
entraînent toujours	$\text{puis. } E < \text{puis. } G.$

On a les propositions suivantes que nous admettrons pour la plupart sans démonstrations :

III. *L'ensemble de tous les sous-ensembles* (1) *d'un ensemble* E *non vide a une puissance supérieure à celle de* E.

(1) Nous comptons l'ensemble vide parmi les sous-ensembles de E. On trouverait une démonstration de ce théorème III dans l'ouvrage déjà cité de M. SIERPINSKI (p. 84).

On peut démontrer (théorème de CANTOR-BERNSTEIN) qu'alors il existe une correspondance biunivoque entre E et F. Réciproquement s'il existe une correspondance biunivoque entre E et F on est évidemment dans le 1er *cas* puisque tout ensemble est lui-même un de ses sous-ensembles. Quand ce 1er *cas* est réalisé, on dit que les deux ensembles E et F ont *même puissance* ou *même nombre cardinal*, et nous écrirons

$$\text{puis. } E = \text{puis. } F.$$

Le signe = s'énonçant « égale » et puis. étant l'abréviation du mot puissance.

2e *cas. Il existe une correspondance biunivoque entre* E *et un sous-ensemble de* F, *mais il n'en existe aucune entre* F *et un sous-ensemble de* E.

Alors on dit que la puissance de E est inférieure à la puissance de F, et nous écrirons

$$\text{puis. } E < \text{puis. } F$$

ou bien

$$\text{puis. } F > \text{puis. } E.$$

3e *cas. Il existe une correspondance biunivoque entre* F *et un sous-ensemble de* E, *mais il n'en existe aucune entre* E *et un sous-ensemble de* F.

Alors on dit que la puissance de E est supérieure à la puissance de F, et nous écrirons conformément aux notations adoptées dans le 2e *cas*

$$\text{puis. } E > \text{puis. } F$$

ou bien

$$\text{puis. } F < \text{puis. } E.$$

4e *cas. Il n'existe aucune correspondance biunivoque entre* E *et un sous-ensemble de* F, *et il n'en existe aucune entre* F *et un sous-ensemble de* E.

Alors on considérerait les puissances de E et de F comme n'étant pas comparables en grandeur. On peut démontrer à l'aide de l'axiome de ZERMELO que ce 4e *cas est impossible.* On désigne quelquefois cette impossibilité par le mot *trichotomie* (1). Remarquons enfin que deux quelconques des cas précédents ne peuvent évidemment pas être réalisés simultanément.

Remarque. — F. HARTOGS a même démontré que :

L'axiome de Zermelo, le théorème de Zermelo et la trichotomie sont équivalents (1).

Il faut entendre par là que de l'axiome de ZERMELO on peut déduire le théorème de ZERMELO et la trichotomie, que du théorème de ZERMELO on peut déduire la trichotomie et l'axiome de ZERMELO et enfin que de la trichotomie on peut déduire l'axiome de ZERMELO et le théorème de ZERMELO.

---

(1) Pour la démonstration de la *trichotomie* et du théorème d'HARTOGS, voir M. SIERPINSKI, ouvrage cité, p. 228-232, et aussi F. HARTOGS, *Math. Ann.*, LXXVI, 1915, p. 443.

Le fait que tout ensemble peut être ordonné résultera du théorème de ZERMELO énoncé plus loin.

Nous adoptons la terminologie suivante : si a précède b, nous dirons que b *suit* a. Si a précède b et si b précède c, nous dirons que b est *entre* a *et* c. Si, dans un ensemble ordonné E, il existe un élément a qui n'est précédé d'aucun autre élément de E, nous dirons que a est le *premier* élément de E. Si, dans un ensemble ordonné E, il existe un élément a qui ne précède aucun autre élément de E, nous dirons que a est le *dernier* élément de E.

On appelle ensemble *bien ordonné* un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble non vide contient un premier élément.

Nous admettrons le théorème suivant :

I. *Théorème de Zermelo. — Tout ensemble peut, d'une possibilité idéale, être bien ordonné.*

Ce théorème affirme seulement l'*existence d'un bon ordre* pour tout ensemble, ne préjugeant rien de la possibilité pour nous de déterminer effectivement un tel ordre dans chaque ensemble particulier.

La démonstration (1) du théorème de ZERMELO suppose que l'on admette le célèbre axiome de ZERMELO, axiome connu aussi sous le nom d'*axiome du choix* et dont voici l'énoncé :

Pour tout ensemble M *dont les éléments sont des ensembles* P *non vides et deux à deux sans élément commun, il existe au moins un ensemble* N *qui contient un élément et un seul de chaque ensemble* P *de* M.

Comme pour le théorème de ZERMELO, cet axiome affirme seulement une *existence,* à savoir l'existence d'un ensemble N ; mais il n'affirme nullement que nous possédons toujours un moyen de déterminer un ensemble N satisfaisant aux conditions énoncées dans l'axiome.

b) *La puissance d'un ensemble.* — Soient E et F deux ensembles, et soit

$$y = \mathrm{T}(x)$$

une transformation faisant correspondre à tout élément x de E un élément y de F. Nous dirons que T est une transformation *biunivoque* de E en F, ou bien que T définit une *correspondance biunivoque* entre E et F, si T fait correspondre à tout élément x de E un élément unique y de F, et si tout élément y de F est le transformé ou le correspondant d'un élément unique x de E.

Ceci posé, étant donnés deux ensembles E et F, les quatre cas suivants sont les seuls *a priori* possibles :

1er *cas. Il existe une correspondance biunivoque entre* E *et un sous-ensemble de* F, *et il en existe une entre* F *et un sous-ensemble de* E.

---

(1) Pour la démonstration du théorème de ZERMELO ainsi que pour toutes les questions traitées dans cette Introduction, nous renvoyons à l'ouvrage de M. W. SIERPINSKI « Leçons sur les nombres transfinis » (Paris, Gauthier-Villars, 1928), et particulièrement aux Chapitres VI et XII de cet ouvrage.

TOME II

COMPACITÉ, SÉPARABILITÉ, TRANSFORMATIONS ET FONCTIONNELLES

CHAPITRE VII

SUR LA NOTION DE COMPACITÉ DANS LES ESPACES ($\mathcal{V}$)

Avant d'aborder l'objet propre de ce Chapitre, objet qui sera expliqué au § II, il nous a semblé utile de résumer dans l'Introduction suivante un certain nombre de définitions et de propositions auxquelles il sera fréquemment fait appel dans la suite et qui sont empruntées à la théorie des nombres transfinis [1].

§ I. **Introduction**. — *a*) *Les ensembles ordonnés.* — Un ensemble E est dit *ordonné* si, pour tout couple d'éléments *a* et *b* distincts et appartenant à E, l'un de ces éléments a pu être considéré comme *précédant* l'autre, et ceci de telle manière que les deux conditions suivantes soient remplies :

1. Asymétrie. On ne peut pas avoir en même temps les deux relations « *a* précède *b* » et « *b* précède *a* ».

2. Transitivité. Si *a* précède *b* et si *b* précède *c*, alors *a* précède *c*.

Au lieu de dire qu'un ensemble E est ordonné, nous dirons aussi que l'on a attribué un *ordre* aux éléments de E.

Il n'est nullement évident que tout ensemble peut être ordonné [2].

---

(1) Le lecteur au courant de la théorie des nombres transfinis pourra passer dans cette Introduction tout ce qui est imprimé en petits caractères, et se contenter d'en lire la dernière partie consacrée aux ensembles *normalement bien ordonnés.*

(2) Par exemple il n'est pas évident que l'on peut ordonner les points d'un plan.

AVERTISSEMENT AU TOME II

Ce fascicule constitue le Tome II de notre Ouvrage sur les « Propriétés des espaces abstraits les plus généraux ». Sa lecture suppose la connaissance approfondie des Chapitres I et II du Tome I (p. 1-17). Nous renvoyons à l'Avant-Propos du Tome I, ainsi qu'à ces deux premiers Chapitres, pour les indications générales sur la nature du sujet traité, pour la définition des espaces $(\mathcal{V})$, pour les propriétés fondamentales des ensembles ouverts et fermés dans ces espaces et pour l'introduction de notre condition α) (tout ensemble de fermeture $\overline{E} = E + E'$ est fermé).

Il ne sera fait qu'assez rarement allusion, dans les pages qui vont suivre, aux questions traitées dans les autres Chapîtres du Tome I. L'indication explicite du renvoi sera alors faite en général. Mentionnons toutefois que l'on trouverait p. 22 la définition des espaces accessibles qui sont certains espaces $(\mathcal{V})$ vérifiant la condition α).

Nous prévenons le lecteur que, comme dans le Tome I, toutes les fois que nous énoncerons une définition ou un théorème sans indiquer dans l'énoncé même à quel espace cette définition ou ce théorème s'applique, il sera toujours sous-entendu qu'il s'applique à l'espace $(\mathcal{V})$ le plus général. L'énoncé des résultats qui sont nouveaux à notre connaissance, sera précédé d'un *. Nos théorèmes seront numérotés avec des chiffres arabes 1), 2), 3),....., le numérotage commencant par 1) au début de chaque Chapître.

Mentionnons enfin que l'abréviation E. A. désigne l'ouvrage de M. Fréchet intitulé « *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale* ». (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

Antoine Appert.

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

146

EXPOSÉS D'ANALYSE GÉNÉRALE

Publiés sous la direction de

MAURICE FRÉCHET

Professeur à la Sorbonne

III

PROPRIÉTÉS DES ESPACES ABSTRAITS LES PLUS GÉNÉRAUX

Compacité, séparabilité, transformations et fonctionnelles.

PAR

Antoine APPERT

Docteur ès-Sciences Mathématiques

PARIS

HERMANN & C^ie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1934

Actualités Scientifiques et Industrielles (*suite*)

Série 1933 :

52. G. Urbain. **La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique.** Première partie ..... 12 fr.
53. G. Urbain. **La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique.** Deuxième partie ..... 12 fr.
54. M. Chatelet. **Spectres d'absorption visibles et ultra-violets des solutions** ..... 7 fr.
55. L. Leprince-Ringuet. **Les transmutations artificielles : particules alpha, neutrons, protons, rayons cosmiques** ..... 15 fr.
56. E. Néculcéa, **Sur la théorie du rayonnement** ..... 7 fr.
57. G. Fournier et M. Guillot. **Sur l'absorption exponentielle des rayons β du radium E** .. 10 fr.
58. Jean Perrin. **La recherche scientifique** ..... 6 fr.
59. L. Brillouin. **La diffraction de la lumière par des ultra-sons** ..... 10 fr.
60. A. Magnan et A. Sainte-Lague. **Le vol au point fixe** ..... 10 fr.
61. M. Prettre. **L'inflammation et la combustion explosive en milieu gazeux, 1re partie Hydrogène et oxyde de carbone** ..... 15 fr.
62. Mme P. Curie. **Les rayons α, β, γ, des corps radioactifs en relation avec la structure nucléaire** ..... 12 fr.
63. H. Mineur. **L'Univers en expansion** ..... 12 fr.
64. T. Cahn. **Les phénomènes biologiques dans le cadre des sciences exactes** ..... 6 fr.
65. A. Magnan et A. Planiol. **Sur l'excédent de puissance des oiseaux** ..... 8 fr.
66. A. Magnan et A. Planiol. **Sur l'excédent de puissance des insectes** ..... 8 fr.
67. J. Trillat. **Organisation et principes de l'enseignement en U. R. S. S.** ..... 12 fr.
68. E. Meyerson. **Réel et déterminisme dans la physique quantique** ..... 10 fr.
69. P. Urbain. **Les sciences géologiques et la notion d'état colloïdal** ..... 18 fr.
70. L. Goldstein. **Les théorèmes de conservation dans la théorie des chocs électroniques** 9 fr.
71. L. Brillouin. **La méthode du champ self-consistant** ..... 12 fr.
72. E. Cartan. **Les espaces métriques fondés sur la notion d'air** ..... 12 fr.
73. P. Swings. **Molécules diatomiques. Etude des termes spectraux** ..... 12 fr.
74. P. Swings. **Spectres moléculaires. Etude des molécules diatomiques** ..... 14 fr.
75. G. Champetier. **La structure de la cellulose dans ses rapports avec la constitution des sucres** ..... 8 fr.
76. Rudolf Carnap. **L'ancienne et la nouvelle logique** ..... 8 fr.
77. Lucien Godeaux. **Questions non résolues de géométrie algébrique** ..... 8 fr.
78. Vera Dantchakoff. **Le devenir du sexe** ..... 15 fr.

Série 1934 :

79. E. Cartan. **Les espaces de Finsler** ..... 12 fr.
80. P. Delens. **La métrique angulaire des espaces de Finsler et la géométrie différentille projective** ..... 12 fr.
81. E. Dubois. **L'effet Volta** ..... 6 fr.
82. M. A. H. Wilson. **The electrical properties of semi conductors and insulators** ..... 4 fr.
83. E. Keightley-Rideal. **On phase boundary potentials** ..... 4 fr.
84. O. Scarpa. **Pile metalliche che funzionano in eccezione alla legge delle tensioni elettriche nei circuiti metallici** ..... 6 fr.
85. M. Volmer. **Das elektrolytische Kristallwachstum** ..... 4 fr.
86. F. Bloch. **Les électrons dans les métaux. Problèmes statiques. Magnétisme** ..... 5 fr.
87. A. F. Joffé. **Conductibilité électrique des isolants solides et des semi-conducteurs** ..... 10 fr.
88. L. Brillouin. **Les électrons dans les métaux du point de vue ondulatoire** ..... 9 fr.
89. L. Brillouin. **Conductibilité électrique et thermique des métaux** ..... 18 fr.
90. J. Heyrovsky. **A polarographic study of the electro-kinetic phenomena of adsorption, electro-reduction and overpotential displayed at the dropping mercury cathode** ..... 12 fr.
91. R. Audubert. **Phénomènes photoélectrochimiques. Action de la lumière sur le potentiel métal-solution** ..... 8 fr.
92. Gillet et N. Andrault de Langeron. **Les colloïdes et la couche de passage** ..... 10 fr.
93. P. Dutoit. **Sur le potentiel métal-solution dans les dissolvants autres que l'eau** ..... 4 fr.
94. G. Brooks. **Laque d'Indochine rhus succedanea, la Laccase et le Laccol** ..... 18 fr.
95. G. Teissier. **Dysharmonies et discontinuités dans la croissance** ..... 10 fr.
96. V. A. Kostitzin. **Symbiose, parasitisme et évolution (étude mathématique)** ..... 15 fr.
97. P. Frank. **Théorie de la connaissance et physique moderne** ..... 10 fr.
98. P. Suings. **La fluorescence des mollécules diatomiques, molécules homopolaires des des groupes, V, VI, VII, du tableau périodique** ..... 10 fr.
99. P. Swings. **La fluorescence des molécules diatomiques, phénomènes complexes** ..... 10 fr.

Actualités Scientifiques et Industrielles (suite)

Série 1934 (*suite*) :

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière. — 7-5-1934.